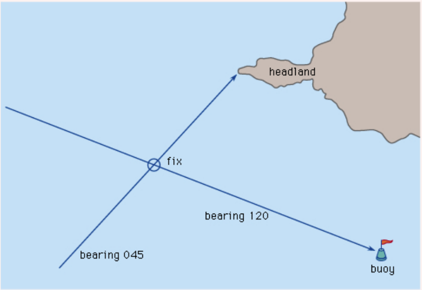
Matematikken bag satellitnavigation
GPS - GLONASS - GALILEO

Johan P. Hansen [1]

[1] Institut for Matematik, Aarhus Universitet

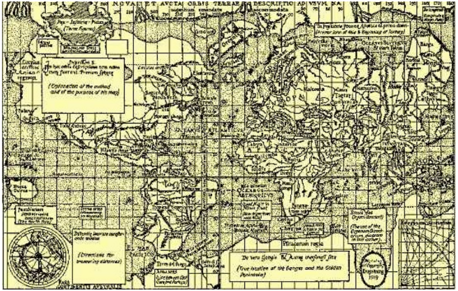
Disposition

Pejling



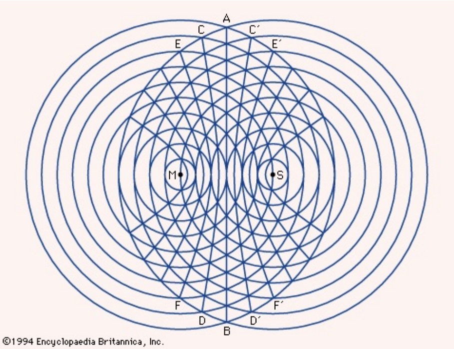
- Tag pejling af 2 kendte punkter
- Bestem skæringspunktet mellem de 2 tilsvarende rette linier på et *passende* kort

Mercator projektion: Verdenskort 1569



- Samme kurs svarer til en ret linie på kortet
- En pejlet vinkel svarer til den samme vinkel på kortet

Hyperbler
Konstante afstandsforskelle til 2 givne punkter



- Kendt afstandsforskel bestemmer, hvilken hyperbelgren i nettet man er på
- Bestemmelse i forhold til mindst 2 hyperbelnet bestemmer positionen
- I praksis (DECCA) bruges 3 hyperbelnet

DECCA og LORAN hyperbelnavigation

- DECCA
  - Landgangen Normandiet 1944
    - Night Passage to Normandy, Lieutenant-Commander Oliver Dawkins, R.N.V.R, Decca, 1969
    - The Decca Navigator System on D-Day, 6 June 1944, An Acid Test, Commander Hugh St. A. Malleson, R.N. (Ret.)
  - DECCA-net i drift i Danmark 1948-1999 - masteren var på Samsø og slaverne ved Møn, Tønder og Hjørring
- LORAN.
  - USA, Japan, Norge og Rusland har LORAN stationer i drift. Norge har en station på Jan Mayen.
  - De lang-bølgede radiosignaler kan modtages under vand, og er derfor nyttige til ubåde.

USA/USSR/EU forskellige motiver

- Som en del af den kolde krigs våbenkapløb besluttede US Department of Defense at udvikle et positionssystem (GPS), der gjorde det muligt for en ubåd hurtigt og præcist at bestemme sin position og affyre sine våben. Raketter var allerede så præsice, at de kunne ramme, hvad som helst blot de kendte affyringspositionen. Det kostede 12 milliarder US dollars og er nu tilgængeligt for alle.
- USSR har et tilsvarende militært system (GLONASS).
- GALILEO er et nyt europæisk system under udvikling med et kommercielt sigte. Systemet vil kunne arbejde sammen med og supplere GPS og GLONASS.

Galileo - mål

- Galileo er et satelitte navigationssystem som bygges af European Union (EU) og European Space Agency (ESA).
- Budget på 20 milliader EURO. Brugen vil være gratis for brugeren.
- Præcisionen bedre end 1 meter - såvel vandret som lodret.
- Bedre dækning på den nordligste del af den nordlige halvkugle end de øvrige systemer.
- Et af målene er at få et europæisk system uafhængigt af GLONASS (russisk), GPS (amerikansk) og Compass (kinesisk).

Galileo - status

- 21 oktober 2011 blev de første 2 af 4 satelliter opsendt med henblik på at validere systemet – de 2 næste følger i 2012.
- Begyndende drift forventes i midten af dette årti.
- Fuld drift med 30 satelitter (27 aktive og 3 i reserve) forventes i 2019.

Rumlig triangulering

- I GPS[1] bestemmer modtageren afstandene til 3 af satelitterne ved at bestemme tiden, det tager for et signal at komme frem.
- Det giver 3 ligninger til at bestemme de 3 koordinater til positionen (x, y, z). Geometrisk udtrykker ligningerne, at positionen er på fællesmængden af 3 kugleflader - altså forventeligt 2 løsninger, hvoraf den ene kan forkastes udfra en rimelighedsbetragtning.

[1] I Galileo regnes der ikke med atstande til satelitter; men med forskelle på afstande

Rumlig triangulering - nøjagtige ure!

Princippet er enkelt, men forudsætter

- at den personlige modtager har et MEGET nøjagtigt ur, der går fuldstændigt synkront med urene i satellitterne. En fejl på 10^{-3} sekund resulterer i en positionsfejl på 300 km.
- at der er en effektiv og nøjagtig metode til afstandsbestemmelse under forudsætning af synkrone ure.

Virkemåde - synkronisering af det lokale ur

Det meget præsice ur haves selvsagt ikke på den lokale modtager til en pris af 1000 kr.; men kan laves på en elegant matematisk måde.

- Betragt fejlen på uret i din lokale modtager som en variabel Δ.
- Mål ikke til 3 men til 4 satelitter for at opstille 4 ligninger til bestemmelse af de 4 variable x, y, z, Δ.

En lokal modtager bestemmer altså ikke blot positionen; men er også et meget nøjagtigt ur, fordi det ved hjælp af matematik synkroniserer til satellit-urene. Nu skal vi se hvordan.

Ligningerne til bestemmelse af position og fejlen på det lokale ur

Lad (x, y, z) være koordinaterne til den ukendte position og $(x_k, y_k, z_k), i = 1, 2, 3, 4$ de kendte koordinater til 4 satelitter. Fejlen i uret på den lokale modtager, betegner vi Δ, så vi måler med en fejl på $d = c\Delta$, hvor c er lysets hastighed. Den målte afstand er derfor

$$d_k = \sqrt{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2 + (z - z_k)^2} + d$$

som medfører, at

$$(x_k^2 + y_k^2 + z_k^2 - d_k^2) - 2(x_k x + y_k y + z_k z - d_k d) + (x^2 + y^2 + z^2 - d^2) = 0$$

Disse 4 sammenhørende ligninger kan med fordel løses ved skift til matrix notation.

Bemærk, at vi vil bestemme de med rødt angivne variable.

Matematisk reformulering af ligningerne I

Definer et skalarprodukt på $\mathbb{R}^4$ ved

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle := \mathbf{a}^t M \mathbf{b}, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ d \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_k = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \\ d_k \end{pmatrix}$$

I denne notation kan ligningerne skrives

$$\frac{1}{2}\langle \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_k \rangle - \langle \mathbf{r}_k, \mathbf{r} \rangle + \frac{1}{2}\langle \mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle = 0$$

Matematisk reformulering af ligningerne II

Med notationen

$$B := \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & d_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & d_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & d_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 & d_4 \end{pmatrix}, \quad \alpha = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1 \rangle \\ \langle \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2 \rangle \\ \langle \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_3 \rangle \\ \langle \mathbf{r}_4, \mathbf{r}_4 \rangle \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ r1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda := \frac{1}{2}\langle \mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle$$

kan ligningerne skrives

$$\alpha - BM\mathbf{r} + \Lambda\mathbf{e} = 0$$

og løsningen bliver

$$\mathbf{r} = MB^{-1}(\Lambda\mathbf{e} + \alpha).$$

Løsning

Sætter vi ovenstående udtryk for $\mathbf{r}$ ind i $\Lambda := \frac{1}{2}\langle \mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle$ får vi, idet vi udnytter at $\langle M(\mathbf{a}), M(\mathbf{b}) \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$, en andengradsligning til bestemmelse af Λ

$$\langle B^{-1}\mathbf{e}, B^{-1}\mathbf{e} \rangle \Lambda^2 + 2\langle B^{-1}\mathbf{e}, B^{-1}\alpha \rangle \Lambda + \langle B^{-1}\alpha, B^{-1}\alpha \rangle = 0$$

Bestemmelse af tidsforskel

Måler den tid et radiosignal er undervejs fra satelit til modtager. Dertil bruges en generator af tilfældige tal.

- Satellitten udsender følgende:

  $$11011111011\ldots$$

  et tal for hvert klokkeslag.
- GPS-modtageren har samme generator.
- GPS-modtageren sammenligner egen følge med den modtagne.
- En forskydning her er udtryk for en tidsforsinkelse.

Lineære skifte registre

Generatoren af tilfældige tal er et Lineært skifte register af bloklængde 10. Faktisk bruges der 2 registre og militæret bruger et af længde 12. Det virker sådan her:

- Registret har en starttilstand

$$1000110111$$

- Første tal udlæses, de øvrige flyttes en plads til venstre.
- Sidste plads gives en værdi svarende til en bestemt lineær sum af de 10 foregående tal, hele tiden beregnet modulo 2.
- Det kunne for eksempel være summen af 3. og 10. tal.

$$0001101111$$

$$0011011111$$

hvilket faktisk er den ene af de to, der bruges i GPS.

- Efter 1023 klokkeslag, står vi med det register vi startede med

Registre og maksimal periode

De værdier, som registret af bloklængde r udlæser udgør en følge af binære tal

$$a_0, a_1, a_2, \ldots$$

og der er en rekursionsligning:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots c_r a_{n-r} \mod 2,$$

hvor c_i er konstanter lig med 0 eller 1. Startværdierne benævnes $a_{-r}, \ldots, a_{-1}$.

For et register af længde r er der 2^r mulige tilstande, idet der på hver af de r pladser kan stå enten 0 eller 1. Specialtilfældet, hvor alle pladserne er 0, har periode 1. For andre er det maksimale antal tilstande $2^r - 1$, som dermed er den maksimale periode for et register.

Genererende funktion

Den genererende funktion er

$$G(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Vi har

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{r} c_i a_{n-i} x^n = \sum_{i=1}^{r} c_i x^i \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-i} x^{n-i} = \sum_{i=1}^{r} c_i x^i (a_{-i} x^{-i} + \cdots + a_{-1} x^{-1} + G(x))$$

Vi får, at

$$G(x) = \frac{\sum_{i=1}^{r} c_i x^i (a_{-i} x^{-i} + \cdots + a_{-1} x^{-1})}{1 - \sum_{i=1}^{r} c_i x^i}$$

Polynomiet

$$f(x) = 1 - \sum_{i=1}^{r} c_i x^i$$

i nævneren kaldes det karakteristiske polynomium for registret.

De karakteristiske polynomier i GPS

De to registre, der bruges i GPS-systemets civile del, har de karakteristiske polynomier :

$$1 + x^3 + x^{10}$$

$$1 + x^2 + x^3 + x^8 + x^9 + x^{10}$$

Ved en kombination af de to registre sender satellitten et periodisk signal med en periode på ca. 1,5 sek., svarende til ca. 450.000 km. (Militærets signal har en periode på ca. en uge).

Perioden I

Sætning. *Antag*

$$a_{-1} = a_{-2} = \cdots = a_{-r+1} = 0, \quad a_{-r} = 1.$$

Perioden er lig med det mindste hele tal p, så det karakteristiske polynomium $f(x)$ er en divisor i $1 - x^p$.
Bevis: Med de givne startværdier og periode p har vi, at

$$\begin{aligned} G(x) = \frac{1}{f(x)} = \quad & a_0 + a_1 x + \ldots a_{p-1} x^{p-1} + \\ & x^p(a_0 + a_1 x + \ldots a_{p-1} x^{p-1}) + \\ & x^{2p}(a_0 + a_1 x + \ldots a_{p-1} x^{p-1}) + \ldots \\ & = (a_0 + a_1 x + \ldots a_{p-1} x^{p-1}) \tfrac{1}{1-x^p} \end{aligned}$$

Så

$$f(x)(a_0 + a_1 x + \ldots a_{p-1} x^{p-1}) = 1 - x^p$$

og $f(x)$ er en divisor i $1 - x^p$.

Perioden II

Antag omvendt, at $f(x)$ er en divisor i $1 - x^q$. Altså, at

$$f(x)(b_0 + a_1 x + \dots b_{p-1} x^{p-1}) = 1 - x^q.$$

Så er

$$G(x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{b_0 + a_1 x + \dots b_{p-1} x^{p-1}}{1 - x^q} = (b_0 + a_1 x + \dots b_{p-1} x^{p-1})(1 + x^q + x^{2q} + x^{3q} + \dots)$$

Da $G(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$ har vi, at $q = p$, at $a_i = b_i$ for alle i og at perioden er lig med p.

Perioden

- Hvis registret har maksimal periode, så er det karakteristiske polynomium irreducibelt. Vises ved brug af ovenstående sætning.
- Det omvendte gælder ikke: $1 + x + x^2 + x^3 + x^4$ er irreducibelt; men registret har kun periode 5.
- Hvis det karakteristiske polynomium er irreducibelt, så er perioden en divisor i $2^r - 1$.
- Hvis $2^r - 1$ er et primtal, så giver ethvert irreducibelt polynomium anledning til et register af maksimal længde $2^r - 1$.
- Primtal på formen $2^r - 1$ kaldes Mersenne primtal. Det største man kender er $2^{43\,112\,609} - 1$ og det er ogsaa det største kendte primtal (det vil kræve 3461 sider at skrive dette tal med 75 cifre pr. linie og 50 linier pr. side).

Opsummering

- Ved at betragte fejlen på dit lokale ur som en variable, er det muligt af bestemme såvel fejlen som positionen på en og samme gang ved at løse 4 ligninger med 4 ubekendte
- Lineære skifte registre giver et matematisk værktøj til af måle tidsforskelle og dermed afstande.