

# **15 MATEMATIKOPGAVER I PISA**

**Et materiale for matematiklærere og andre med  
interesse i grundskolens matematikundervisning**

**om**

***hvordan danske elever besvarer matematikopgaver i den  
internationale PISA-undersøgelse***

**til inspiration af  
*matematiklæreres brug af denne viden i undervisning og  
formativ evaluering***

**Lena Lindenskov, Peter Weng  
Institut for didaktik  
Danmarks Pædagogiske Universitetsskole  
Aarhus Universitet  
Udgivet med støtte fra tipsmidlerne**

## Indholdsfortegnelse

1.	OPGAVER ER IKKE BARE OPGAVER.....	3
1.1	Orientering, viden og inspiration.....	4
1.1.1	Om orienteringen.....	5
1.1.2	Om viden.....	5
1.1.3	Om inspiration.....	6
2.	ELEVERS NIVEAU OG OPGAVERS SVÆRHEDSGRAD.....	6
2.1	Seks niveauer for elevers dygtighed.....	6
2.2	Seks niveauer for opgavespørgsmål.....	9
2.3	Opgaver, hvor danske elever præsterer særlig højt eller særlig lavt.....	11
3.	ORIENTERING OM MATEMATIK SOM MATHEMATICAL LITERACY I PISA.....	11
3.1	Matematisk stof i 'overordnede idéområder'.....	12
3.2	Kontekst.....	13
3.3	Otte kompetencer og tre kompetenceklasser.....	13
3.4	Opgaveformater.....	15
3.5	Funktionel matematik.....	15
4.	VIDEN OG INSPIRATION OM DANSKE ELEVERS SVAR.....	16
4.1	TERNINGER.....	18
4.2	SPILLETERNINGER.....	21
4.3	TRAPPE.....	24
4.4	TØMRER.....	27
4.5	OPVÆKST.....	31
4.6	DEN BEDSTE BIL.....	37
4.7	RØVERIER.....	40
4.8	FARVEDE BOLSJER.....	46
4.9	PRØVER I NATUR/TEKNIK.....	48
4.10	AFFALD.....	50
4.11	STEMMER PÅ PRÆSIDENTEN.....	52
4.12	PRØVERESULTATER.....	56
4.13	VALGMULIGHEDER.....	61
4.14	SKATEBOARD.....	63
4.15	TRAPPEMØNSTER.....	70
5.	INSPIRATION.....	74

## 1. OPGAVER ER IKKE BARE OPGAVER...

Gennem historien er der konstrueret et hav af opgaver til matematikundervisning og matematikprøver, og opgaverne er besvaret af millioner af elever. Eleverne arbejder med opgaver som et vigtigt middel i deres læring og selvevaluering. Lærerne arbejder med opgaver som et vigtigt middel til at få indblik i, hvad eleverne kan og ikke kan, både undervejs, så læreren bedst muligt kan vejlede eleven (i formativ evaluering), og ved den afsluttende vurdering (i summativ evaluering), som kan give pejlinger til elevens videre færd i uddannelsessystemet.

Hvem kender elevernes svar?

I alt overvejende grad er det den enkelte elev selv og læreren, der har kendskab til, hvordan opgaverne behandles af eleven og indgår i den daglige matematikundervisning. I nogle tilfælde har fagteams af lærere mulighed for at analysere en større samling elevbesvarelser, og for udpegede censorer ved afsluttende prøver er der mulighed for at se mange besvarelser fra elever, de ikke selv har undervist.

Hvordan kan elevsvar hjælpe læreren til at hjælpe eleven?

Ikke alle opgaver er lige brugbare i den formative evaluering. Er kendskabet til en opgave begrænset til, om de enkelte elever har svaret helt rigtigt eller helt forkert, så kan læreren ikke bruge opgaven til at give substantiel vejledning. Men i den udstrækning læreren har viden om

- formålet med opgaven: Hvad skal opgaven teste? og
- tolkningen af forskellige elevbesvarelser: Hvilken forståelse og kunnen hos eleven indikeres af besvarelsen?

så kan elevs opgavebesvarelser være produktive i lærerens vejledning. Læreren kan bruge dem til at tilrettelægge den videre læreproces for eleverne og som inspiration i fagdidaktisk udvikling af undervisningsforløb.

Opgaverne fra de internationale undersøgelser er – i den udstrækning de harmonerer med den lokale matematikundervisnings mål og indretning – eksempler på opgaver, der kan bruges produktivt. I denne publikation præsenteres 15 opgaver fra PISA-undersøgelserne<sup>12</sup>, der kan bruges i undervisning og formativ evaluering i matematik, enten i direkte brug, i tilpasset form eller som inspiration til opgaver, som lærerne selv udvikler.

---

<sup>1</sup> Nogle PISA-opgaver er frigivet til offentlig brug, andre er ikke. De 15 opgaver er frigivne opgaver. Det er ikke muligt at frigive alle opgaver, for nogle opgaver skal genbruges, når undersøgelsen gentages efter tre år. Det er de genbrugte opgaver der gør det muligt at sammenligne undersøgelserne med hinanden.

<sup>2</sup> Nogle PISA-opgaver er frigivet til offentlig brug, andre er ikke. De 15 opgaver er frigivne opgaver. Det er ikke muligt at frigive alle opgaver, for nogle opgaver skal genbruges, når undersøgelsen gentages efter tre år. Det er de genbrugte opgaver, der gør det muligt at sammenligne undersøgelserne med hinanden.

## 1.1 Orientering, viden og inspiration

Denne publikation er rettet til matematiklærere og andre med interesse i grundskolens matematikundervisning. Der gives *en orientering* om, hvordan matematikopgaver indgår i PISA-undersøgelserne.

Publikationen præsenterer *en viden* om danske elevers opgavebesvarelser<sup>3</sup>. Kvaliteten af danske elevsvar sammenlignes med kvaliteten af elevsvar fra andre lande, og der gives eksempler på konkrete svar fra danske elever, så man får indblik i variationen af svar og ræsonnementer, hvoraf nogle bedømmes til at være fuldt korrekte, andre til at være delvis korrekte og atter andre til at være forkerte. Desuden gengives, hvor stor en andel der ikke har besvaret den pågældende opgave.

Publikationen er *et materiale, der kan bruges* i den formative løbende evaluering og inspirere til generelt at bruge, tilpasse og lade sig inspirere af matematikopgaver fra internationale undersøgelser.

Hermed præsenteres der for første gang et materiale på dansk, som udnytter fordelene ved matematikopgaver i internationale undersøgelser, og som man hverken finder i afgangsprøver, nationale test, opgaver i lærebøger eller i opgaver, som læreren selv udformer. Fordelene ved matematikopgaver i internationale undersøgelser er

- at opgavespørgsmål bliver udformet, diskuteret og beskrevet af fagfolk i mange lande
- at opgaverne bliver afprøvet af mange elever
- at angivelsen af hver enkelt opgaves sværhedsgrad bygger på, at mange elever afprøver et helt system af opgaver
- at elevsvar på hver enkelt opgave bliver vurderet og kodet efter fælles detaljerede retningslinjer med eksempler fra faktiske elevsvar
- og at resultaterne dokumenteres og opbevares fra gang til gang, så de kan indgå i en samlet vidensbase.

Generelt har der ikke været den store opfølgning i form af mere detaljerede analyser af indholdet i de store internationale undersøgelser som TIMSS og PISA, som Danmark har deltaget i de senere år, og hvori matematik er været en del. Der er flere grunde til, at vi med denne publikation forsøger at bryde med denne "tradition". Det er generelt uheldigt, at faglig-pædagogisk diskussion foregår på grundlag alene af tal, her i form af ranglistede elevpræstationer fra forskellige lande, der offentliggøres i medierne, uden nogen information om grundlaget for sammenligningen eller med et par tilfældige eksempler. Efter offentliggørelse af resultater fra PISA 2000, 2003 og 2006 har der i debatten mest været en generel fokusering på de danske elevers placering i forhold til andre landes elevers præstationer samt på enkelte opgavers relevans eller manglende relevans. Kun i sidstnævnte tilfælde har der været detaljerede informationer inddraget.

---

<sup>3</sup> Der anvendes informationer fra PISA 2003, fordi matematik var et hovedområde i 2003, med så mange opgaver, at de dækkede matematik meget bredt, og at alle elever fik matematikopgaver som en del af deres test. PISA er en omfattende undersøgelse, der har læsning, matematik og naturfag med hver gang, men hvor hovedområdet skifter: læsning i 2000 og 2009, matematik i 2003 og 2012, naturfag i 2006 og 2015.

Den store mængde information, der indhentes ved en undersøgelse af PISA's omfang, bliver sjældent brugt til dyberegående analyser, der offentliggøres for en større læseskare. Vi tænker specielt på gruppen af matematiklærere, der er en meget afgørende faktor i implementeringen af fagmålene i matematik. I stedet for at bruge undersøgelsens generelle ranking af landene i generelle debatter om skoleforhold finder vi det mere konstruktivt at fremhæve nogle af de mange informationer fra undersøgelserne, som vi mener, den enkelte lærer kan anvende både direkte og indirekte i sin undervisning.

### 1.1.1 Om orienteringen

Med publikationen får læserne mulighed for at blive orienteret om:

- Hvordan ser eksempler på matematikopgaver ud?
- Hvilke principper er matematikopgaverne bygget op efter?
- Hvilken slags matematisk stof testes i opgaverne?
- Hvilken slags kompetencer testes i opgaverne?
- Hvilke fænomener af matematisk karakter testes i opgaverne?
- Hvilke kontekster er med i opgaverne?
- Hvor svære er opgaverne?
- På hvilke måder stilles der spørgsmål i opgaverne?
- Skal eleverne sætte krydser, skrive tal eller ord, når de svarer på opgaverne?
- Gives der point for delvist rigtige svar?
- Vurderer og koder man, på hvilken måde eleven ræsonnerer?

### 1.1.2 Om viden

Læseren kan få viden om, hvordan danske elever svarer på de enkelte opgavespørgsmål sammenlignet med, hvordan elever i andre lande svarer:

- Hvor mange procent af eleverne giver korrekt svar på opgaven?
- Hvor mange giver delvis korrekt svar på opgaven?
- Hvor mange giver forkert svar på opgaven?
- Hvor mange svarer ikke på opgaven?
- Hvor godt svarer danske elever i gennemsnit på opgaven?
- Hvor godt svarer piger og drenge i andre lande i gennemsnit på opgaven?

De danske elevsvar sammenstilles her i oversigtsform med elevsvar i de nordiske lande, i Tyskland, Holland, USA, Japan, Tyrkiet og Mexico. Desuden kan man se, hvordan elever i hele OECD samlet set svarer på opgaverne. Vi har konstrueret disse oversigter for hvert enkelt opgavespørgsmål.

Informationer om, hvor godt en elev svarer sammenlignet med andre elever, eller hvor godt et lands elever svarer sammenlignet med andre landes elever, kan blive til viden, der kan bruges fremadrettet, når informationerne kombineres med formålet med opgaven og med overvejelser over, hvad elevsvarene indikerer om forståelse og kompetence. De nøgne informationer om, hvor godt der er svaret sammenlignet med andres besvarelser, kan ganske vist give stof til generelle politiske diskussioner, men de nøgne informationer hjælper ikke til at opstille handlemuligheder.

### 1.1.3 Om inspiration

Læseren kan blive inspireret til at udnytte matematikopgaverne i sin egen undervisning og formative evaluering:

- fordi vi beskriver, hvad det indikerer, at elever svarer korrekt, delvist korrekt eller forkert på den enkelte opgave
- fordi vi giver eksempler på konkrete svar fra 100 – 400 danske elever, som vi er gået i dybden med
- fordi læreren kan tilpasse eller udskifte
  - konteksten
  - de opgivne tal
  - de opgivne figurer
  - den sproglige formulering af teksten
  - den sproglige formulering af selve spørgsmålet
  - opgaveformatet

Vi har foretaget en ekstra undersøgelse, hvor vi er gået i dybden med mellem et hundrede og fire hundrede besvarelser fra danske elever. Vi har analyseret opgavepapirerne, som disse elever har skrevet deres overvejelser og svar på. Papirerne indeholder også de koder, som besvarelserne er vurderet med. Dermed har vi mulighed for at præsentere eksempler på autentiske danske elevsvar. Vi foreslår, at sådanne autentiske elevsvar kan indgå som materiale i matematikundervisningen.

## 2. ELEVERS NIVEAU OG OPGAVERS SVÆRHEDSGRAD

Med PISA-undersøgelserne er der konstrueret en skala for elevens dygtighed med hensyn til mathematical literacy<sup>4</sup>. Elevens samlede besvarelse giver en placering på skalaen. Skalaen er opdelt i seks niveauer. Desuden kan en elev præstere så ringe, at det vurderes til at være under det laveste niveau. Ligeledes er opgaverne efter deres sværhedsgrad placeret på samme skala.

### 2.1 Seks niveauer for elevens dygtighed

På niveau 6, med de højeste præstationer, og som nås af 5 % af alle 15-årige i OECD-landene, kan den 15-årige:

Vise en betydelig indsigt inden for forandringer og sammenhænge, der kommer til udtryk gennem færdigheder i at anvende abstrakte ræsonnementer og argumenter, samt anvendelse af teknisk viden og valgte problemløsningsstrategier og generaliseringer af matematiske løsninger til problemer i "the real world".

---

<sup>4</sup> Skalaen for mathematical literacy er konstrueret, så middelværdien for alle elever i OECD-landene bliver 500, og standardafvigelsen bliver 100. Når standardafvigelsen er 100, betyder det, at to tredjedele af alle elever placeres med mathematical literacy mellem 400 og 600.

Specielt kan den 15-årige:

Fortolke såvel synlige som usynlige matematiske informationer i kontekster, der kan forekomme i alle mulige situationer fra "the real world".

Fortolke periodiske funktioner, der kan beskrive forhold, og udføre beregninger med de begrænsninger, der kan være pålagt en given situation.

Fortolke sammensatte tekster og anvende abstrakte ræsonnementer til at løse problemer på baggrund af indsigt i sammenhænge.

Indsigtsfuldt anvende algebra og grafer til løsning af problemer og anvende algebraiske udtryk som repræsentation for sammenhænge i "the real world".

Løse problemer på baggrund af proportionalitets-ræsonnementer.

Bruge strategier med flere trin i brugen af formler og beregninger ved problemløsning.

Lægge en strategi og anvende algebra og forsøg-fejl-metoden til at løse problemer.

Frembringe en formel, som kan beskrive sammensatte situationer i "the real world" og give forklaringer på informationer, der kan føre frem til at udføre beregninger og opstille en endelig formel.

Anvende en indsigt i geometrien til at arbejde med og generalisere sammensatte mønstre.

Analysere og anvende en given formel i en situation fra "the real world".

Kommunikere sammenhængende ved brug af logiske ræsonnementer og argumenter

På niveau 5, som nås af 10 % i OECD-landene, er der tale om at kunne:

Løse problemer ved at gøre brug af avanceret algebra og modellering.

Forbinde matematiske repræsentationer til sammensatte situationer i "the real world".

Anvende sammensatte og flertrins strategier ved problemløsning, samt reflektere og kommunikere ræsonnementer og argumenter.

Specielt kan den 15-årige:

Fortolke sammensatte formler i en naturvidenskabelig kontekst.

Fortolke periodiske funktioner i situationer fra den reelle verden og udføre der til relaterede beregninger.

Anvende avancerede problemløsningsstrategier.

Fortolke og sammentænke sammensatte informationer.

Finde og anvende velbegrundede strategier i en problemløsningssituation.

Reflektere over sammenhængen mellem en algebraisk givet formel og de data, den omhandler.

Anvende proportionalitets-ræsonnementer ved for eksempel hastigheder.

Analysere og anvende en given formel på en situation fra "the real world".

Kommunikere om ræsonnementer og argumenter.

På niveau 4, som nås af 10 % i OECD-landene, er der tale om at kunne:

Forstå og arbejde med mange repræsentationer, inklusiv givne modeller af situationer fra "the real world" til løsning af problemer.

Være meget fleksibel i sine fortolkninger og ræsonnementer ved arbejdet med ukendte kontekster og i kommunikationen af forklaringer og argumenter.

Specielt kan man:

Aflæse og fortolke sammensatte grafer med op til flere variable.

Fortolke sammensatte og ukendte grafiske repræsentationer af "the real world".

Anvende mange repræsentationer til løsning af et praktisk problem.

Relatere tekstbaserede informationer til en grafisk repræsentation og kunne kommunikere forklaringer.

Analysere formler der beskriver "the real world".

Analysere tredimensionale geometriske situationer vedrørende rumfang og andre relaterede funktioner.

Analysere en given matematisk model, der er givet ved en kompleks formel.

Analysere og anvende formler, der er beskrevet i ord, og kunne manipulere og anvende lineære formler, der repræsenterer forhold i "the real world".

Gennemføre en følge af beregninger med for eksempel procent, forhold, addition og division.

På niveau 3, med 21 % af eleverne i OECD-landene, er der tale om at kunne:

Løse problemer, der involverer arbejde med mange repræsentationer (en tekst, en graf, en tabel, en formel), inklusiv nogen fortolkning og anvendelse af ræsonnementer i situationer i ukendte kontekster samt kommunikere og argumentere.

Specielt kan den 15-årige:

Fortolke ukendte grafiske repræsentationer af "the real world".

Finde afgørende elementer i en matematikholdig tekst.

Fortolke og anvende en simpel algoritme, der ikke fremgår eksplicit i en tekst.

Fortolke en tekst og udtænke en strategi.

Se og forbinde mange repræsentationer, for eksempel to relaterede grafer, en tekst og en tabel, en formel og en graf.

Anvende ræsonnementer, der involverer proportioner i mange ukendte kontekster, samt kommunikere ræsonnementer og argumenter.

Anvende givne elementer i en matematikholdig tekst eller situation til at fremstille en graf.

Bruge en række simple beregninger og procedurer til at løse problemer, som for eksempel ordning af data, beregning af tidsforskelle og fortolke lineære sammenhænge.

På niveau 2, som nås af 20 % i OECD-landene, er der tale om at kunne:

Arbejde med simple algoritmer, formler og procedurer til at behandle problemer.

Forbinde tekst med simple repræsentationer (graf, tabel, simpel formel).

Fortolke og ræsonnere på et elementært niveau.

Specielt er der tale om at kunne:

Fortolke en simpel tekst og forbinde den korrekt til en graf.

Fortolke en simpel tekst og beskrive og anvende en simpel algoritme.

Fortolke en simpel tekst og anvende proportionalitets-ræsonnementer eller beregninger.

Fortolke et simpelt mønster.



Fortolke og anvende ræsonnementer i en praktisk kontekst, der involverer en simpel og almindelig anvendelse af bevægelse, hastighed og tidssammenhænge.  
Lokalisere relevante informationer i en graf og aflæse grafværdier direkte.  
Opstille og anvende algoritmer og simple algebraiske formler.

På niveau 1, med 14 % i OECD-landene, er der tale om at kunne:

Lokalisere relevante informationer i en simpel tabel eller graf.

Følge direkte og simple instruktioner til at læse informationer, der er givet direkte i en simpel tabel eller graf i en standard - eller en anden almindelig form.

Gennemføre simple beregninger med en sammenhæng mellem to kendte variable.

Specielt drejer det sig om at kunne:

Forbinde en simpel sammenhæng mellem et specielt træk i en tekst og en simpel graf samt aflæse værdien på grafen.

Lokalisere og aflæse specifikke værdier i en tabel.

Udføre simple beregninger, der involverer sammenhæng mellem to kendte variable.

## 2.2 Seks niveauer for opgavespørgsmål

Opgavespørgsmålene er ikke lige svære. Hvert enkelt opgavespørgsmål har fået tildelt en sværhedsgrad efter, hvor svære opgaverne har vist sig at være. Sværhedsgrad ligger på samme skala opdelt i de seks niveauer og med 500 skorepoint som gennemsnitlig sværhedsgrad. Niveau 1 er det letteste og niveau 6 det sværeste.

De femten opgaver, vi præsenterer her, indeholder i alt 21 opgavespørgsmål, som blandt andet varierer i sværhedsgrad. For at få et hurtigt indblik i sværhedsgrader kan man betragte disse seks opgavespørgsmål i figur 1:

Grænsen mellem niveau 1 og niveau 2 illustreres af OPVÆKST Spørgsmål 2 med delvis korrekt besvarelse. Her er sværhedsgraden på 420 skorepoint.

Niveau 2 illustreres af DEN BEDSTE BIL Spørgsmål 1. Her er sværhedsgraden på 447 skorepoint.

Niveau 3 illustreres af TRAPPEMØNSTER. Her er sværhedsgraden 484 skorepoint.

Niveau 4 illustreres af SKATEBOARD Spørgsmål 2. Her er sværhedsgraden 570 skorepoint.

Niveau 5 illustreres af PRØVERESULTATER. Her er sværhedsgraden 620 skorepoint.

Niveau 6 illustreres af RØVERIER Spørgsmål 1 med fuld korrekt besvarelse. Her er sværhedsgraden 694 skorepoint.

Figur 1. Seks opgaver til illustration af sværhedsgrad.

Alle de 21 opgavespørgsmål i denne publikation er i figur 2 oplistet efter stigende sværhedsgrad, med det letteste spørgsmål først. Bemærk, at den gennemsnitlige sværhedsgrad på 500 skorepoint ligger midt i niveau 3:

Mellem niveau 1 og 2:	
OPVÆKST	Spørgsmål 2 med delvis korrekt besvarelse
På niveau 2:	
TRAPPE	Spørgsmål 1
DEN BEDSTE BIL	Spørgsmål 1
SKATEBOARD	Spørgsmål 1 med delvis korrekt besvarelse
OPVÆKST	Spørgsmål 1
TERNINGER	Spørgsmål 1
På niveau 3 lettere end gennemsnittet 500:	
TRAPPEMØNSTER	Spørgsmål 1
SKATEBOARD	Spørgsmål 1 med fuld korrekt besvarelse
På niveau 3 sværere end gennemsnittet 500:	
SPILLETERNINGER	Spørgsmål 2
OPVÆKST	Spørgsmål 2 med fuld korrekt besvarelse
På niveau 4	
FARVEDE BOLSJER	Spørgsmål 1
AFFALD	Spørgsmål 1
SKATEBOARD	Spørgsmål 3
PRØVER I NATUR/TEKNIK	Spørgsmål 1
VALGMULIGHEDER	Spørgsmål 1
SKATEBOARD	Spørgsmål 2
OPVÆKST	Spørgsmål 3
RØVERIER	Spørgsmål 1 med delvis korrekt besvarelse
På niveau 5:	
STEMMER PÅ PRÆSIDENTEN	Spørgsmål 1 med fuld korrekt besvarelse
PRØVERESULTATER	Spørgsmål 1 med fuld korrekt besvarelse
DEN BEDSTE BIL	Spørgsmål 2 med fuld korrekt besvarelse <sup>5</sup>
På niveau 6:	
TØMRER	Spørgsmål 1 med fuld korrekt besvarelse
RØVERIER	Spørgsmål 1 med fuld korrekt besvarelse

Figur 2: de 21 opgavespørgsmål efter sværhedsgrad.

<sup>55</sup> DEN BEDSTE BIL Spørgsmål 2 er ikke behandlet i denne publikation.

## 2.3 Opgaver, hvor danske elever præsterer særlig højt eller særlig lavt

Generelt er de opgaver, der i PISA tillægges en høj sværhedsgrad, relativt svære for elever i alle lande. Tilsvarende er opgaver, der tillægges lav sværhedsgrad, relativt lette opgaver for elever i alle lande. Der er variationer inden for dette generelle billede, og disse variationer kan blandt andet sige noget om forskelle i læseplaner og undervisningstradition.

Danske elever er internationalt toppræsterende i SKATEBOARD Spørgsmål 2, hvor kun elever i to andre lande (Japan og Korea) præsterede højere.

Danske elever er meget højt præsterende i TRAPPEMØNSTER Spørgsmål 1, hvor kun elever i fire lande præsterede højere. Også i FARVEDE BOLSJER præsterer kun elever i fire lande bedre end de danske elever. I BEDSTE BIL Spørgsmål 1 er det kun elever i 5 andre lande, der præsterer højere.

Der er en relativ lav præstation (en del under gennemsnittet) hos danske elever i spørgsmål, der angår algebra. Det gælder fx BEDSTE BIL Spørgsmål 2, hvor danske elever i relativ høj grad ikke besvarer spørgsmålet.<sup>6</sup>

For VALGMULIGHEDER Spørgsmål 1 er danske elevers præstationer relativt lave (en hel del under gennemsnittet), mens præstationerne i PRØVERESULTATER Spørgsmål 1 ligger lige under gennemsnittet.

## 3. ORIENTERING OM MATEMATIK SOM MATHEMATICAL LITERACY I PISA

PISA-undersøgelserne er indikator-projekter. Det vil sige, at rækken af undersøgelser har til formål at indhente indikatorer, der kan informere om, hvordan de deltagende lande relativt har forberedt de 15-årige til indtage deres rolle i den "voksne verden" som konstruktive samfundsborgere.

Derfor er det ikke læseplaner, der er grundlag for udvælgelsen af den viden og kunnen, man har valgt at teste eleverne i, men en viden og kunnen, som et udvalg af matematikfagkyndige har ment var relevant at have i bagagen ved afslutningen af den obligatoriske undervisning som 15-årig ved grundskoleforløbets afslutning. Det vil sige, at eleverne, der deltog i undersøgelsen, fik mulighed for at demonstrere matematisk viden og kunnen i kontekster eller situationer, som indikator på, hvordan de er forberedt på fremtiden. Kontekster og situationer defineret via opgavesættet står naturligvis til diskussion, og det er netop et af målene med denne publikation.

I PISA beskrives ovennævnte viden og kunnen gennem kompetencebeskrivelser, der har til hensigt at informere om den enkelte elevs evne til at handle ved brug af matematik i matematikholdige situationer inden for privatlivet, arbejdslivet og samfundslivet.

Denne matematiske viden og kunnen finder sin meget generelle beskrivelse i det overordnede kompetencebegreb mathematical literacy, som i PISA 2003 er defineret som:

---

<sup>6</sup> I gennemsnit for hele OECD undlader 19 % at svare, mens det gælder for 32 % af danske elever og 31 % af italienske elever.

...an individual's capacity to identify and understand the role that mathematics plays in the world, to make well-founded judgements and to use and engage with mathematics in ways that meet the needs of that individual's life as a constructive, concerned and reflective citizen.

Eller oversat til dansk:

... det enkelte individs evne til at identificere og forstå den rolle, matematik spiller i verden, til at give velfunderede bedømmelser, bruge og engagere sig ved hjælp af matematik på måder, der lever op til de behov, der er, for at det enkelte menneske kan fungere som en konstruktiv, engageret og reflekterende borger.

### 3.1 Matematisk stof i 'overordnede idéområder'

I forlængelse af ønsket om at teste for fremtidsrelevante kompetencer er det matematiske stof ikke som udgangspunkt organiseret i matematiske discipliner fra skolefaget eller videnskabsfaget, for matematiske udfordringer fremtræder jo ikke uden for skolen som 'algebra' eller som 'geometri'. Det matematiske stof er derimod organiseret i PISA på en fænomenologisk måde efter, hvordan udfordringerne fremtræder. Det har betydet en opdeling i fire såkaldte overordnede idéområder, som er Rum og form, Forandringer og sammenhænge, Usikkerhed samt Størrelser.

De traditionelle matematiske discipliner indgår med begreber og tankemåder som midler til at behandle de overordnede idéområder. De enkelte opgavespørgsmål tilknyttes både til et idéområde og til en disciplin; men resultaterne rapporteres først og fremmest efter idéområder. De fire idéområder kan kort beskrives som i figur 3.

#### **Rum og form.**

Der arbejdes med former i to og tre dimensioner samt sammenhænge mellem disse. Dette idéområde har begreber fra geometrien som grundlag, men her kan også inddrages tal og statistik. 'Rumlige sans' og erkendelse af forskelle og ligheder i analysen af rumlige fænomener repræsenteret på forskellig måde i forskellige sammenhænge er centralt. Tilsvarende gælder erkendelsen af geometriske objekters egenskaber og deres positioner i forhold til hinanden. Mønstre i statiske situationer hører til under Rum og form, mens mønstre i dynamiske situationer hører til i næste idéområde.

#### **Forandringer og sammenhæng**

Naturlige fænomener er manifestationer af forandringer, og de indgår i varierede sammenhænge. Området trækker blandt andet på funktionsteori ved behandlingen af variable til beskrivelse af forandringer og sammenhænge, samtidig med at algebra og geometri kan inddrages. Ligninger og uligheder samt andre relationer indgår sammen med anvendelsen af symboler, tal og grafisk repræsentation. Det kræver forståelse af sammenhænge og forskelle mellem forskellige repræsentationer at kunne vælge den til en bestemt situation optimale repræsentation.

#### **Usikkerhed**

Området involverer de traditionelle områder sandsynlighedsregning og statistik, som fra disses inddragelse i læseplanerne i Danmark for snart 30 år siden har vist sin berettigelse og stigende betydning i vores informationsfund. Her ses data som tal i en kontekst, og der lægges vægt på

forståelsen af, at en enkelt hændelse kan have tilfældigt udfald, men at der ved gentagelser kan komme mønstre til syne.

### **Størrelser**

Størrelser omhandler behandling af tal og numeriske størrelser. Forståelsen af relative størrelser, genkendelse af mønstre i kvantificerbare sammenhænge og tallenes brugbarhed til at kvantificere verden, samt evnen til at aflæse numeriske fænomener i den omgivne verden behandles under dette område. Størrelser knytter sig primært til talbehandling, talforståelse og 'sans for størrelse' med forståelse af tal i forskellige sammenhænge og de processer, der kan anvendes. Hovedregning og estimering er væsentlige træk i kategorien Størrelser.

Figur 3. De fire overordnede idéområder.

Ligeledes er problemstillingerne i opgaverne forsøgt formuleret uden kendetegn og kendeord, der i sig selv knytter løsningen direkte til anvendelsen af en bestemt teknik eller en bestemt formel. For sådanne hints findes jo netop ikke i situationer uden for skolen. Et af de generelle problemer med matematikundervisningen er, at hvis eleven ikke genkender "situationen" som en typeopgave, vedkommende har arbejdet med tidligere i skolen, så sker der ingen aktivering af den viden og de tekniske færdigheder, som eleven eventuelt besidder. Et af målene med opgaverne i PISA er netop at undersøge, hvorvidt eleven anvender sine matematiske kundskaber på at løse det matematikholdige problem i en tekstlig kontekst, der ikke er skolebogens, men fx tager udgangspunkt i oplysninger i en avis.

### **3.2 Kontekst**

Et vigtigt aspekt ved matematisk kompetence er at involvere sig matematisk: Dette er afgørende for elevens tilgang til at behandle problemer i matematikholdige situationer eller kontekster. Hvilken strategi eleven vælger til at behandle en problemstilling, vil ofte være afhængig af beskrivelsen af situationen eller konteksten, eleven skal behandle problemet i. De situationer og kontekster, problemerne stilles i i PISA-undersøgelserne, er forsøgt stillet i sfærer af "liv", som det formodes, de 15-åriges liv kan vedrøre. Der er i PISA defineret fire typer livssfærer, hvori man beskriver de situationer og kontekster, som undersøgelsens opgaver relaterer sig til:

- Det personlige liv
- Uddannelses- og arbejdsliv
- Samfundsliv
- Videnskabelige sammenhænge

### **3.3 Otte kompetencer og tre kompetenceklasser**

De problemstillinger, der indgår i opgaverne, er stillet således, at de er tilgængelige for matematisk behandling i en "real-world" kontekst, der som mål har en aktivering af eleven til at undersøge, hvilke matematiske begreber der kan indgå i anvendelsen af en matematisk løsning til det stillede problem. Det grundlæggende begreb i denne proces er "matematisering", som i hovedtræk dækker over tre delprocesser. Først oversættelsen af det givne problem i den "virkelige" verden til matematikkens verden, for eksempel gennem opstilling af en model. Andet trin er arbejdet med den matematiske model ved hjælp af matematikken inden for matematikkens verden. Tredje trin er oversættelsen af resultatet af den matematiske bearbejdning af modellen til

fænomener og sprog i den "virkelige" verden, afsluttende med en refleksion over resultatets pålidelighed.

Gennemførelsen af en sådan matematisering kan kræve, at mange kompetencer inddrages blandt de otte kompetencer, som også er beskrevet i Fælles Mål. Det drejer sig om tankegangs-, problembehandlings-, modellerings- og ræsonnementskompetencer, der skal anvendes til at spørge og svare med, og om matematik. Tilsvarende skal der anvendes repræsentations-, symbol- og formaliserings-, kommunikations- og hjælpemiddelkompetencer til at omgås sprog og redskaber i matematik.

I PISA-undersøgelserne har man valgt at beskrive og dokumentere de kognitive processer, som disse kompetencer omfatter, i henhold til tre kompetencekategorier: reproduktionskompetence, sammenhængskompetence og refleksionskompetence.

Reproduktionskompetence omfatter hovedsageligt reproduktion af praktiseret viden. Denne kompetence involverer viden om fakta og almindelige problemstillinger, genkendelse af ligninger, erindring om velkendte matematiske objekter og egenskaber, udførelse af rutineprocedurer, anvendelse af standard-algoritmer og tekniske færdigheder samt manipulation af udtryk med symboler og formler i kendt form og beregninger.

Sammenhængskompetence bygger på reproduktionskompetencer hvad angår videreførelse af problemløsningen til situationer, der ikke er rutineprægede, men som stadig indbefatter kendte og halvkendte forhold. Disse kompetencer kræver som regel en form for argumentation, der f.eks. forbinder forskellige overordnede idéområder og/eller forskellige repræsentationer i disse, der kan knyttes til problemstillingen.

Refleksionskompetence omfatter en vis refleksionsevne fra elevens side, der knytter sig til processer i behandlingen af et problem. Den relaterer sig til elevernes evne til at planlægge løsningsstrategier og implementere dem i problemstillinger, der indeholder flere elementer, og som eventuelt er mere 'originale' (eller ukendte) end problemstillingerne i forbindelse med sammenhængskompetence. Figur 4 opsummerer forskellene mellem kompetencekategorierne.

<b>Reproduktionskompetence</b>	<b>Sammenhængs-kompetence</b>	<b>Refleksionskompetence</b>
Standardrepræsentationer og standarddefinitioner	Udformning	Kompleks problemløsning og problemfremstilling
Rutineberegninger	Standard problemløsning, omdannelse og fortolkning	Reflektering og indsigt
Rutineprocedurer	Flere veldefinerede metoder	Oprindelig matematisk indfaldsvinkel
Rutinepræget problemløsning		Flere komplekse metoder
		Generalisering

Figur 4. De tre kompetencekategorier.

### 3.4 Opgaveformater

I PISA-undersøgelserne vurderes matematisk kompetence ved hjælp af en kombination af opgaver. Enten skal eleverne selv konstruere et svar eller vælge et svar. I de tilfælde, hvor eleverne selv skal konstruere et svar, skelner man mellem:

- et udvidet svar, hvor eleven fx skal vise en beregning, give en forklaring eller give en begrundelse for sin løsning (dette kaldes også åben-konstrueret-svar)
- et kort svar, hvor eleven skal give et tal som svar
- et svar med flere tal.

I de tilfælde, hvor eleverne skal vælge et svar, skelner man mellem:

- komplekse flervalgsopgaver (multiple-choice), hvor eleven præsenteres for et antal udsagn og skal angive om de fx er sande eller falske
- simple flervalgsopgaver (multiple-choice), hvor eleven skal vælge et svar ud af flere muligheder.

I ca. en tredjedel af matematikspørgsmålene skal eleverne selv konstruere et svar. Svarene i forbindelse med disse opgaver kræver, at vurderingen foretages af kodere, som er personer, der har gennemgået en særlig træning og prøvning. For at sikre, at opgavesvar bliver bedømt ud fra samme kriterier, overvåger PISA pålidelighed af bedømmelserne. Erfaringen viser, at der kan udarbejdes klare bedømmelseskriterier, så pålideligheden bliver høj.

### 3.5 Funktionel matematik

Som endnu et eksempel på, hvordan intentionen om at få indikationer på funktionel kompetence med relevans for fremtiden giver sig udslag i designet, kan nævnes, at det er tilladt for eleverne at bruge lommeregner og andre redskaber, som de er vant til at bruge i skolen. Dette giver det bedste billede af, hvad eleverne kan præstere, og giver det mest informative grundlag for sammenligning mellem præstationer i forskellige lande. Et systems valg med hensyn til at lade eleverne få adgang til at bruge lommeregnere er i princippet ikke anderledes end andre undervisningsmæssige politiske beslutninger truffet i de forskellige systemer som ikke kontrolleres af PISA. De elever, som er vant til at have en lommeregner til rådighed, når de besvarer spørgsmål, ville være ringere stillet, hvis dette hjælpemiddel blev taget fra dem.

Måden at teste på i PISA-undersøgelserne og beskrivelsen heraf kan ses som et generelt forsøg på at få vendt opmærksomheden væk fra at sætte "skolematematikken" som mål, hen imod en undervisning og læring, der er målrettet den funktionelle brug af matematikken i situationer, eleven kan knytte til sin oplevelse af og tænkning om livet. Dette forsøg er måske af meget større betydning for fremtidens matematikundervisning end den rangering af landene, der også er en del af PISA. I den udstrækning, det lykkes at fremme dette aspekt fra PISA-undersøgelserne, er det vores vurdering, at udviklingen af de matematikholdige hverdagskompetencer, der er søgt beskrevet med forskellige kompetencebegreber, også vil kunne fremmes.<sup>7</sup>

---

<sup>7</sup> Danske forskere er centrale i formuleringen af nye kompetencebegreber med matematik. Det gælder 'mathemacy' ved O. Skovsmose; det gælder 'numeralitet' ved T. Wedege og L. Lindenskov; det gælder 'analytisk kompetence' ved L. Lindenskov og ikke mindst 'matematiske kompetencer' ved M. Niss, som finder anvendelse både i Fælles Mål og i PISA.

## 4. VIDEN OG INSPIRATION OM DANSKE ELEVERS SVAR

I denne hoveddel af publikationen præsenteres viden om danske elevers besvarelser som inspiration til matematikundervisningen. Denne viden beskrives for hver af de 15 opgaver og deres underspørgsmål. Rækkefølgen af præsentationen af de 15 opgaver følger opgavernes overordnede idéområde. Rækkefølgen fremgår af figur 5.

TERNINGER	Rum og form
SPILLETERNINGER	Rum og form
TRAPPE	Rum og form
TØMRER	Rum og form
OPVÆKST	Forandringer og sammenhænge
DEN BEDSTE BIL	Forandringer og sammenhænge
RØVERIER	Usikkerhed
FARVEDE BOLSJER	Usikkerhed
PRØVER I NATUR/TEKNIK	Usikkerhed
AFFALD	Usikkerhed
STEMMER PÅ PRÆSIDENTEN	Usikkerhed
PRØVERESULTATER	Størrelser
VALGMULIGHEDER	Størrelser
SKATEBOARD	Størrelser
TRAPPEMØNSTER	Størrelser

Figur 5. De 15 opgavers rækkefølge og idéområde.

Hver opgave og opgavespørgsmål beskrives i fem punkter:

(1) For hver opgave starter vi med en gengivelse af opgaveteksten, som den foreligger for eleverne i testen. Selve opgaven er placeret på en side for sig, og da formatet er kopierbart, er det muligt for læreren at kopiere opgaven som den foreligger, og det er muligt at tilpasse opgaven til lærerens elever. Derefter præsenterer vi viden om punkterne (2) til (5):

(2) Hvordan tillægges opgaven point?

Her angiver vi pointfordelingen af elevsvar og giver eksempler fra den officielle PISA-kodevejledning.

(3) Hvilke informationer kan opgaven give?

Her angiver vi karakteristika ved opgaven:

IDÉOMRÅDE

KONTEKST

KOMPETENCEKLASSE

FORMAT

SVÆRHEDSGRAD



(4) Hvordan besvarede danske elever spørgsmålet – sammenlignet med andre elever?

Her sammenligner vi præstationer hos danske elever med elever i andre lande. Vi giver den kvantitative procentfordeling af svar med forskellig kvalitet i Danmark og andre lande. Det gør vi ved at angive, hvor mange procent der har fået tilkendt spørgsmålets forskellige koder, og ved at angive samlede rigtighedsprocent for spørgsmålet. Den samlede rigtighedsprocent angives for drenge, piger og samlet.

(5) Hvordan besvarede danske elever opgaven – analyse af originalsvar?

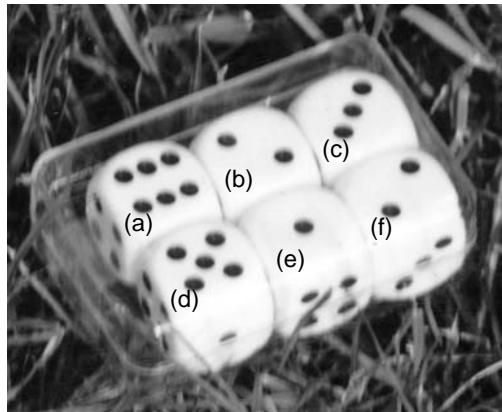
Her præsenterer vi resultater fra dybtgående analyser af mellem hundrede og fire hundrede danske elevbesvarelser. Vi giver eksempler på originalsvar, som vi kommenterer. Det er spørgsmålets karakter, der afgør, hvilke analyser det er muligt at give. Fx giver mere komplekse opgaver med argumenter mulighed for mere viden end enkle opgaver, hvor eleven skal angive et tal som svar.

## 4.1 TERNINGER

---

På billedet kan du se seks terninger, mærket (a) til (f).

For alle den slags terninger er der en regel: Det samlede antal øjne på to modstående sider er altid syv.



Skriv i hver kasse det antal øjne, der er på den **modstående** side af den tilsvarende terning på billedet.

(a)	(b)	(c)
(d)	(e)	(f)

Hvordan tillægges opgaven point?

Pointfordelingen af elevsvar med eksempler fra PISA-kodevejledningen:

Fuldt point

Kode 1: I den øverste række skal der stå (1 5 4) og i den nederste (2 6 5).

Ækvivalente svar blot vist ved tilsvarende antal prikker er acceptabelt.

Ingen point

Kode 0: Andre svar

Kode 9: Ikke besvaret

### Hvilke informationer kan opgaven give?

Karakteristika ved opgaven:

PISA 2003 kategoribeskrivelser	
IDÉOMRÅDE	Rum og form
KONTEKST	Uddannelsesliv
KOMPETENCEKLASSE	Reproduktionskompetence
FORMAT	Kort svar
SVÆRHEDSGRAD	478 niveau 1

Opgaven har til formål at undersøge, om eleverne kan anvende en given algebraisk sammenhæng, summen af modstående siders antal af "øjne" skal være 7, givet en todimensionel gengivelse, fotografi, af en terning.

### Hvordan besvarede danske elever opgaven sammenlignet med elever i andre lande?

Svarprocenternes fordeling i Danmark og andre lande fremgår af tabellen nedenfor. Under piger og drenge og alle står opskrevet procent rigtige besvarelser:

Land	0 point	1 point	Ikke besvaret	Piger	Drenge	Alle
Danmark	19	71	10	72	70	71
Finland	16	80	5	81	78	80
Island	27	59	14	62	56	59
Norge	26	65	9	68	62	65
Sverige	17	78	5	78	78	78
Tyskland	19	74	7	76	73	74
Holland	21	72	7	74	70	72
USA	21	63	16	61	64	63
Japan	17	79	4	80	78	79
Tyrkiet	28	55	17	54	55	55
Mexico	32	30	38	29	31	30
OECD	20	66	14	65	66	66

Omkring 3 ud af 4 danske elever besvarer opgaven korrekt, og det giver en placering noget over OECD-gennemsnittet. I den nordiske sammenligning klarer de danske elever sig i midten, mellem Finland og Sverige, som klarer sig bedst, og Norge og Island, med de mindste rigtighedsprocenter. Det er værd at notere, at pigerne i flere af landene præsterer bedre end drengene. Det er tankevækkende, at så mange danske elever, 30 %, ikke kan besvare denne opgave efter 9 års undervisning.

#### 4.1.4 Hvordan besvarede danske elever opgaven? Analyse af originalsvar

Da opgaven er en kortsvarsopgave, hvor eleverne skal angive tal som svar, uden skriftlig argumentation, er de forkerte svar i de danske elevers besvarelser det mest interessante at gå i dybden med. Som tabellen viser, har 19 % af eleverne givet et forkert svar. Det interessante

spørgsmål er, hvilke tankegange og strategier disse elever har anvendt. I de besvarelser, vi er gået i dybden med, har vi fundet tre fejltyper:

Den ene type er GENTAGELSE:

Her skriver eleven simpelthen de viste antal øjne øverst og nederst præcist som tegningen viser. I første fejltipe forestiller vi os, at eleven ikke har læst teksten, men set tegning og kassen til indsættelse, og så har indsat.

Den anden type er SPEJLING:

Her skriver eleven også de viste antal øjne, men her spejler eleven med en spejlingsakse 'vandret' gennem tegningen af æsken. I anden fejltipe forestiller vi os, at eleven ikke har læst første del af teksten om, at summen er syv af modstående siders øjne, men kun sidste del af teksten, som er 'Skriv i hver kasse det antal øjne, der er på den modstående side af den tilsvarende terning på billedet.'

Den tredje fejltipe er REGNEFEJL:

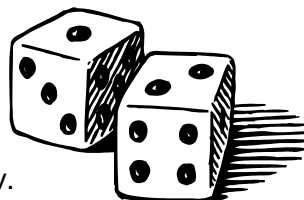
Her er der regnefejl i alle eller nogle af beregningerne.

## 4.2 SPILLETERNINGER

Til højre er der et billede af to spilleterninger.

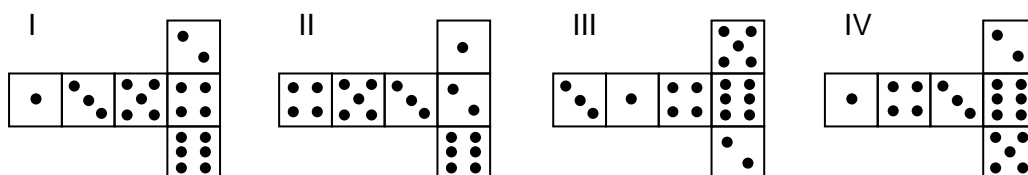
Spilleterninger er specielle terninger med øjne på siderne, for hvilke der gælder følgende regel:

Det samlede antal øjne på to modstående sider er altid syv.



Du kan lave en spilleterning ved at klippe, folde og lime et stykke karton. Det kan gøres på flere måder. Nedenfor ses fire udklip med øjne på siderne. Disse kunne bruges til at lave spilleterninger med.

Hvilket eller hvilke blandt udklippene nedenfor kan foldes, så der bliver dannet en spilleterning, der opfylder reglen om, at summen af øjnene på to modstående sider skal være lig med 7? For hvert af udklippene skal du sætte en ring om enten "Ja" eller "Nej" i skemaet nedenfor.



Udklip	... opfylder reglen om, at summen af de modstående sider er 7?
I	Ja / Nej
II	Ja / Nej
III	Ja / Nej
IV	Ja / Nej

### 4.2.1 Hvordan tillægges opgaven point?

Pointfordelingen af elevsvar med eksempler fra PISA-kodevejledningen:

Fuldt point

Kode 1: Nej, Ja, Ja, Nej i den rækkefølge.

Intet point

Kode 0: Andre svar

Kode 9: Ikke besvaret

#### 4.2.2 Hvilke informationer kan opgaven give?

Karakteristika ved opgaven:

Pisa 2003 kategoribeskrivelser	
IDÉOMRÅDE	Rum og form
KONTEKST	Det personlige liv
KOMPETENCEKLASSE	Sammenhængskompetence
FORMAT	Sammensatte multiple-choice
SVÆRHEDSGRAD	503 niveau 3

Både SPILLETERNINGER og TERNINGER ligger i idéområdet Rum og form; men mens TERNINGER kræver brug af talforståelse og talsammenhænge, så kræver SPILLETERNINGER tillige anvendelse af rumlig forståelse.

#### 4.2.3 Hvordan besvarede danske elever opgaven sammenlignet med elever i andre lande?

Svarprocenternes fordeling i Danmark og andre lande fremgår af følgende tabel. Først angives procenterne for elevsvar med ingen rigtige (0 point), 1 rigtigt svar, 2 rigtige svar, 3 rigtige svar og 4 rigtige svar. Det er kun elevbesvarelser med 4 korrekte, der vurderes til at få kode 1 og tælle med point:

Land	0 korrekt	1 korrekt	2 korrekt	3 korrekt	4 korrekt	Ikke besvaret	Piger	Drenge	Alle
Danmark	1	5	6	12	71	5	72	69	71
Finland	1	3	6	12	76	1	76	76	76
Island	2	8	10	16	61	3	64	59	61
Norge	3	8	9	17	56	6	58	55	56
Sverige	3	7	9	13	64	4	66	62	64
Tyskland	2	6	7	14	69	2	71	67	69
Holland	3	7	7	11	72	1	71	72	71
USA	3	11	13	20	53	1	53	53	53
Japan	1	2	4	9	83	1	84	82	83
Tyrkiet	5	14	15	22	41	4	40	42	41
Mexico	8	16	21	22	29	4	28	31	29
OECD	3	8	9	16	63	2	63	62	63

Opgaven besvares både af både piger og drenge i Danmark med en relativ høj rigtighedsprocent, kun Finland præsterer bedre blandt de nordiske lande. Denne opgave har også en tendens mod en højere rigtighedsprocenter hos pigerne i forhold til drengene i nogle lande, fx i Danmark, Norge, Sverige og Island.

#### 4.2.4 Hvordan besvarede danske elever opgaven? Analyse af originalsvar

For de 110 danske opgavebesvarelser, vi har analyseret originalsvarene, gælder, at for besvarelser med 3 rigtige er der eksempler på, at fejlen forekommer ved såvel det første, det anden, det tredje og det fjerde udklip. Det fleste med 3 rigtige har dog i det første udklip, og de færreste med 3 rigtige har fejl i det fjerde udklip.

Da TERNINGER OG SPILLETERNINGER umiddelbart ligner hinanden, og TERNINGER kræver brug af talforståelse og talsammenhænge, mens SPILLETERNINGER også kræver anvendelse af rumlig forståelse, er kombinationen af de to opgaver interessant. De to opgaver kan i kombination bruges i formativ evaluering som indikatorer på elevens styrkesider i relation til tal og rum. De fleste af de 110 elever har besvaret begge opgaver korrekt. En mindre gruppe har besvaret begge opgaver forkert. Men en del elever giver korrekt besvarelse af den ene af opgaverne og forkert besvarelse af den anden. Heraf er der dobbelt så mange elever med korrekt svar på TERNINGER (kun talforståelse og talsammenhænge) og forkert på SPILLETERNINGER (også rumlig sans), som der er elever med korrekt svar på SPILLETERNINGER og forkert på TERNINGER.

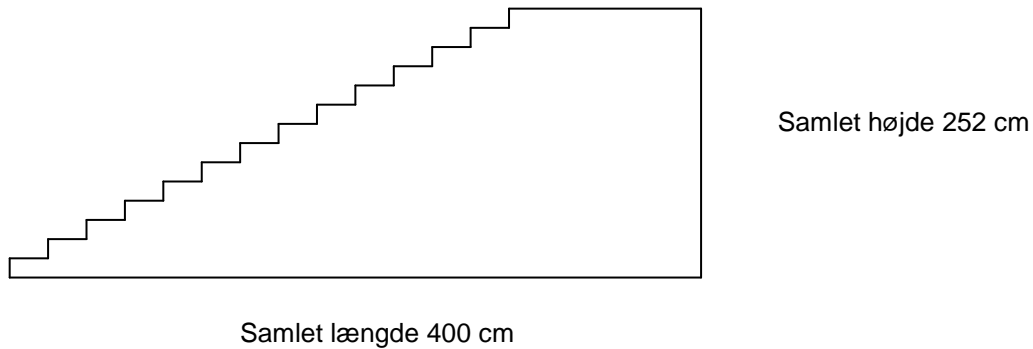
Blandt fire elever med fejltypen GENTAGELSE i opgaven TERNINGER svarer to elever korrekt på SPILLETERNINGER, en elev svarer forkert og en elev undlader at svare. Alle elever med fejltypen SPEJLING i opgaven TERNINGER svarer forkert på SPILLETERNINGER.

Specielt for de nordiske lande har vi samlet rigtighedsprocenterne i de to opgaver i nedenstående tabel. Det er karakteristisk at procent rigtige svar på de to opgaver er lige store blandt drenge og piger i Danmark og blandt drenge i Island. Men for resten af Norden er rigtighedsprocenterne større for TERNINGER (kun talforståelse og talsammenhænge) end for SPILLETERNINGER (også rumlig sans).

	M 145 TERNINGER			M 555 SPILLETERNINGER		
	Alle	Piger	Drenge	Alle	Piger	Drenge
Danmark	71	72	70	71	72	69
Finland	80	81	78	76	76	76
Norge	65	68	62	56	58	55
Sverige	78	78	78	64	66	62
Island	59	62	56	57	56	58

## 4.3 TRAPPE

Tegningen nedenfor viser en trappe med 14 trin og en samlet højde på i alt 252 cm:



Hvad er højden på hvert af de 14 trin?

Højde: ..... cm.

### 4.3.1 Hvordan tillægges opgaven point?

Pointfordelingen af elevsvar med eksempler fra PISA-kodevejledningen:

Fuldt point

Kode 1: 18

Intet point

Kode 0: Andre svar

Kode 9: Intet svar.



#### 4.3.2 Hvilke informationer kan opgaven give?

Karakteristika ved opgaven:

PISA 2003 kategoribeskrivelser	
IDÉOMRÅDE	Rum og form
KONTEKST	Uddannelses- og arbejdsliv
KOMPETENCEKLASSE	Reproduktionskompetence
FORMAT	Kortsvar
SVÆRHEDSGRAD	421 niveau 2

Konteksten er kategoriseret som uddannelses- og arbejdsliv. Opgaven handler om et fænomen, nemlig en trappe, der er alment kendt, og på baggrund af informationer, der knytter tal, tekst og figur sammen, skal man finde frem til et tal, der ikke er opgivet direkte på figuren.

Kategoriseringen af opgaven til idéområdet Rum og form skyldes den visualisering af en trappe, som eleven formodes at gøre sig i behandlingen af problemet for at nå frem til anvendelsen af en divisionsalgoritme. Tegningen af trappen er med for at eleven kan skabe associationer til termerne 'trappe' og 'trin'. Der er også mulighed for at eleven kan tælle de 14 lodrette højder på tegningen ud over at læse udtrykket '14 trin'. Disse processer karakteriseres som værende af rutinemæssig art og kræver derfor kun reproduktionskompetence for at kunne besvares. Opgaven er en kortsvars-opgave, der ikke kræver dokumentation for udregninger eller forklaringer. (At vi i 4.3.5 kan give eksempler på elevforklaringer, skyldes, at vi har foretaget en dybtgående analyse af elevsvar på originaldokumenterne)

Det er en interessant detalje ved opgaven, at der er informationer, som ikke skal bruges i behandlingen af spørgsmålet. Det er karakteristisk for al brug af matematik uden for skolen, at man selv skal sortere og fravælge i de givne informationer. At have en situation, hvor alle grafiske og talmæssige informationer skal bruges til besvarelse af et givet spørgsmål, er kun noget, man finder i opgaver i skolens matematikundervisning. Det er derfor interessant at undersøge, om nogle elever ser ud til at anvende den overflødige information, her længdeangivelsen 400.

#### 4.3.3 Hvordan besvarede danske elever opgaven sammenlignet med elever i andre lande?

Svarprocenternes fordeling i Danmark og andre lande:

Land	0 point	1 point	Ikke besvaret	Piger	Drenge	Alle
Danmark	12	82	6	79	85	82
Finland	8	85	7	84	86	85
Island	15	78	7	80	76	78
Norge	11	82	7	81	82	82
Sverige	13	82	6	81	83	82
Tyskland	6	76	18	74	79	76
Holland	12	85	3	82	87	85
USA	15	70	15	69	71	70
Japan	8	81	11	81	81	81
Tyrkiet	18	65	17	66	64	65
Mexico	25	68	8	67	68	68
OECD	12	78	10	77	79	78

De danske elever præsterede lige over OECD-gennemsnittet på denne opgave og på niveau med de andre nordiske lande. I Norden svarer drengene, når man ser bort fra Island, bedre end eller på lige fod med pigerne. Forskellen mellem drenges og pigers præstationer er størst i Danmark, mens forskellene i Finland, Norge og Sverige ikke er markante.

#### 4.3.4 Hvordan besvarede danske elever opgaven? Analyse af originalsvar

Med en rigtighedsprocent på 82 % er det langt de fleste elever, der kan løse denne opgave. Blandt de 119 tilfældigt udvalgt opgavebesvarelser forekommer der blandt de forkerte svar mange forskellige regneudtryk, der indeholder de tre tal 14, 252 og 400. Det er det sidste tal, 400, informationen om en længde, der ikke skal anvendes til besvarelsen af opgaven. Der er eksempler på besvarelser med tallene 14, 252 og 400 i otte kombinationer, hvoraf de seks kombinationer indeholder tallet 400:

$$(252 : 400) \cdot 14$$

$$(400 : 252) \cdot 14$$

$$400 : 252$$

$$400 : 14$$

$$252 : 400$$

$$400 : 13$$

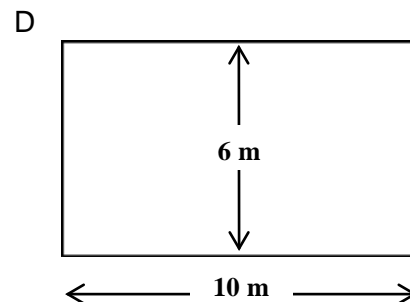
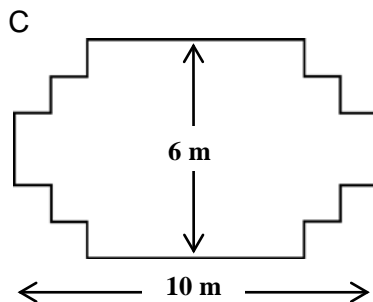
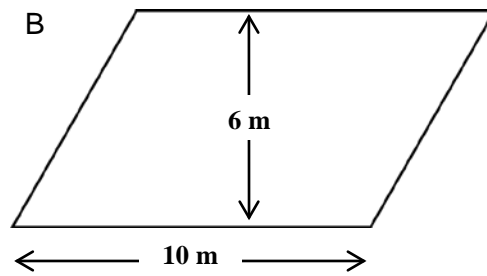
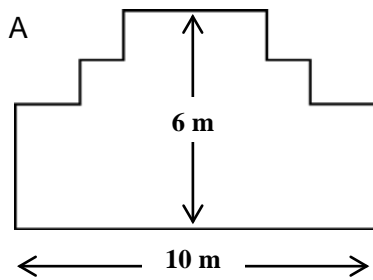
$$14 : 252$$

$$252 : 13$$

Cirka 11 % af de 119 elever svarer på denne måde, hvilket kan tyde på at de som 15-årige med erfaring fra mange timers undervisning anvender strategien "gør noget ved de tal du ser!". Dette må vække til eftertanke. At tallet 13 kommer ind i beregningerne skyldes at eleverne tæller de vandrette korte reposer på figuren. De ser hverken den øverste "lange" linje som et trin eller bruger tekstens oplysning om at der er 14 trin.

## 4.4 TØMRER

En tømrer har 32 meter bjælker af træ, som han vil bruge til kanter rundt om et havebed. Han har tænkt på, at havebedet kunne se ud som vist på en af nedenstående tegninger.



Sæt ring om enten "Ja" eller "Nej" for hver tegning og angiv dermed, om den kan bruges eller ej, når man kun har 32 meter bjælker af træ til rådighed.

Tegning af havebed	Kan denne tegning bruges, hvis man kun har 32 meter bjælker af træ til rådighed?
Tegning A	Ja / Nej
Tegning B	Ja / Nej
Tegning C	Ja / Nej
Tegning D	Ja / Nej

#### 4.4.1 Hvordan tillægges opgaven point?

Pointfordelingen af elevsvar med eksempler fra PISA-kodevejledningen:

Fuldt point

Kode 2:

Ja, Nej, Ja, Ja, i den rækkefølge

Intet point

Kode 1: Nøjagtigt tre rigtige. Det er altså gjort op, hvor mange elever der har netop tre af de fire svar korrekte, men det er kun svar med alle fire korrekte, der giver point.

Kode 0: To eller derunder rigtige

Kode 9: Intet svar.

#### 4.4.2 Hvilke informationer kan opgaven give?

Karakteristika ved opgaven:

PISA 2003 kategoribeskrivelser	
IDÉOMRÅDE	Rum og form
KONTEKST	Uddannelses – og arbejdsliv
KOMPETENCEKLASSE	Sammenhængskompetence
FORMAT	Sammensatte multiple-choice
SVÆRHEDSGRAD	Niveau 6 scorepoint 687

Denne komplekse multiple-choice opgave er givet i en semi-realistisk kontekst, der er kategoriseret til konteksten uddannelses- og arbejdsliv. Opgaven er formuleret som noget, der typisk forekommer i matematikbøger, hvor et autentisk problem ofte bliver forsimplet, så det autentiske forsvinder eller kun kan opretholdes, hvis opgaveløseren vil se bort fra detaljer i beskrivelsen, der ikke taget hensyn til. Trods denne skolekontekst er kompetencen, der skal anvendes til at løse opgaven, relevant. Eleven skal kunne se, hvad de fire figurer har af fælles egenskaber og forskelligheder, derfor er idéområdet Rum og form, og der skal anvendes sammenhængskompetence. Man skal både afkode visuel information, ræsonnere, bruge teknikker og indsigt fra geometri og vedholdende tænke logisk i forhold til hver af de fire tegninger. Opgaven hører til blandt de sværeste i PISA 2003, med en sværhedsgrad på niveau 6 og et scorepoint på 687.

#### 4.4.3 Hvordan besvarede danske elever opgaven sammenlignet med elever i andre lande?

Bemærk at tre korrekte svar bliver kodet med 1 point, men at det ikke tæller med i rigtighedsprocenten.

Land	0 point	1 point	2 Point	Ikke besvaret	Piger	Drenge	Alle
Danmark		34	22	4	19	24	22
Finland		36	22	1	22	23	22
Island		36	20	1	21	19	20
Norge		33	20	3	16	23	20
Sverige		35	20	3	18	22	20

Tyskland		29	24	3	22	26	24
Holland		31	24	1	22	26	24
USA		31	15	1	11	19	15
Japan		32	38	1	37	39	38
Tyrkiet		24	12	5	9	14	12
Mexico		24	6	4	5	7	6
OECD		31	20	3	17	23	20

De danske elever præsterer stort set på niveau med eleverne i de andre nordiske lande. Det vil sige, at kun hver femte elev er i stand til at finde den korrekte rækkefølge, som denne opgavetype kræver, og hvor alle fire 'enten – eller' - valg skal foretages korrekt. Desuden vil en elev med praktiske erfaringer med snedkerarbejde korrekt påstå, at ingen af bedene kan laves, på grund af spild ved savningen, så længderne må i virkelighedens verden blive kortere. Det er dog under 3 %, der mener, at ingen af bedene kan laves, så der er grund til at tro, at langt de fleste elever er villige til at se bort fra spildet, der vil forekomme i en autentisk kontekst. Generelt præsterer drengene bedre end pigerne, og i Danmark er der en forskel på 5 %.

Det er bemærkelsesværdigt, at kun meget få elever undlader at svare på opgaven, og det er et gennemgående træk i alle lande.

#### 4.4.4 Hvordan besvarede danske elever opgaven? Analyse af originalsvar

På i alt 169 elevbesvarelser har vi optalt og kommenteret de forskellige svarkombinationer, der forekommer:

J N J J: 39 elever, svarende til ca. 23 %. Disse elever har gennemført opgaven med korrekt resultat.

N N N N: 5 elever, svarende til ca. 3 %. Her kan det være elever, der tænker, det ikke kan lade sig gøre på grund af, at der saves noget væk mm.

N N N J: 7 = ca. 4 %. Her tænker eleven rigtigt om firkanters omkreds og ræsonnerer kun i forhold til omkreds af rektangler.

N N J N: 7 = ca. 4 %. Her kan elever have tænkt rigtigt, men læst omvendt og svaret omvendt.

N J N N: 2 = ca. 1 %. Her har elever svaret omvendt ved at bytte om på J og N.

J N N N: 2 = ca. 1 %. Her har vi ingen bud på tankegangen.

N N J J: 5 = ca. 3 %. Eleverne har for det første læst tegningerne lodret. Dernæst anvender de en konkret hverdagstænkning om f.eks. 4 tændstikker, der både kan danne rette vinkler og kan skubbes hen i skæve vinkler?

N J J N: 2 = ca. 1 %. Her har vi ingen bud på tankegangen.

J J N N: 1 = ca. 1 %. Her har vi ingen bud på tankegangen.

N J N J: 25 = ca. 15 %. Her er elever, der holder styr på rækkefølgen af A, B, C og D, men anvender en konkret hverdagstænkning om f.eks. 4 tændstikker, der både kan danne rette vinkler og kan skubbes hen i skæve vinkler?

J N J N: 11 = ca. 7 %. Eleverne forveksler Ja og Nej og læser tegningerne lodret.

J N N J: 16 = ca. 9 %. Det er elever, der kan gennemskue tegning A, men ikke tegning C, med hensyn til kompleksitet

N J J J: 1 = ca. 1 %. Her har vi ingen bud på tankegangen.

J J J N : 2 = ca. 1 %. Her har vi ingen bud på tankegangen, udover at eleverne måske bytter om på Ja og Nej og tænker rigtigt omkring firkant- og omkredsbegreber.

J J N J: 8 = 5 %. Det kan være elever, der læser tegningerne lodret først.

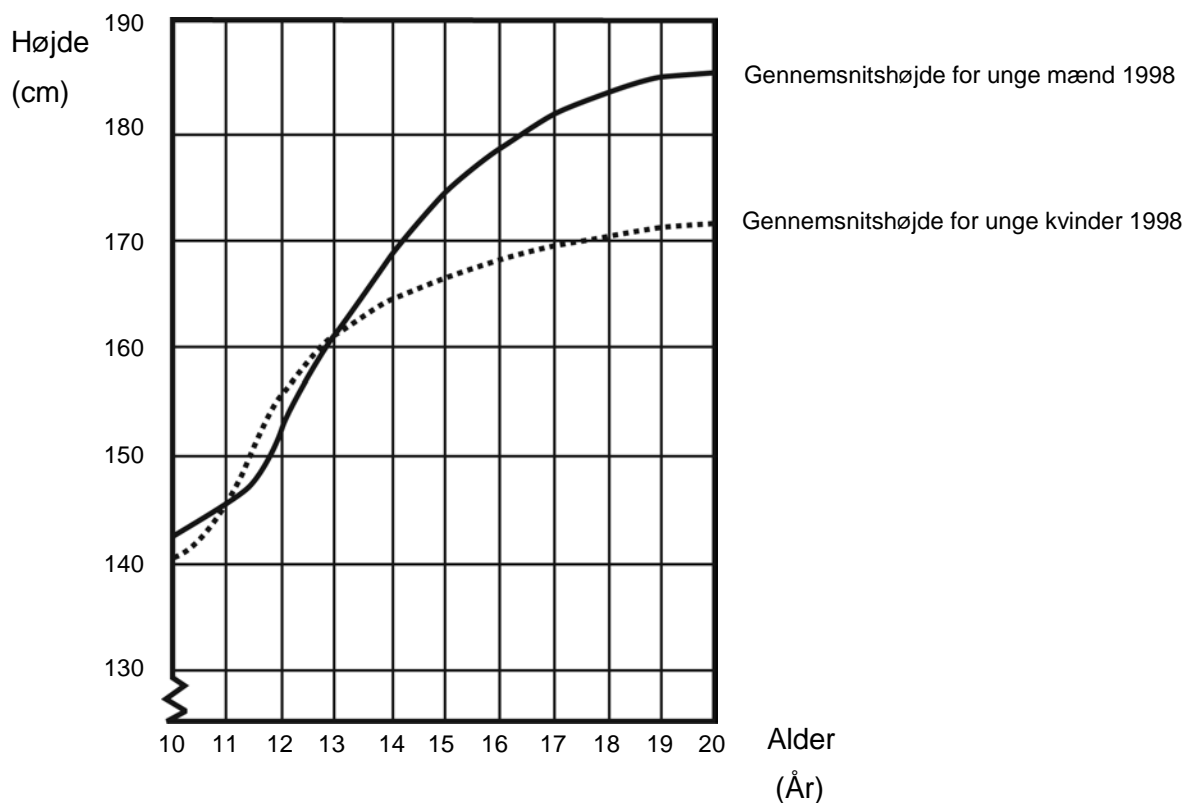
J J J J: 17 = ca. 10 %. Her er elever, der ud fra hverdagsviden mener, det godt kan lade sig gøre, uden skelen til svind ved savning og "luft" i parallelogrammets hjørner.

Ikke besvarede eller kun delvist besvarede er sammenlagt 19 elever, svarende til 11 %.

## 4.5 OPVÆKST

### DE UNGE BLIVER HØJERE

DENNE GRAF VISER GENNEMSNITSHØJDEN I 1998 FOR HENHOLDSVIS UNGE



### MÆND OG UNGE KVINDER I HOLLAND.

Spørgsmål 1:

Siden 1980 er gennemsnitshøjden for 20-årige kvinder forøget med 2,3 cm til 170,6 cm. Hvad var gennemsnitshøjden for 20-årige kvinder i 1980?

Svar: ..... cm

Spørgsmål 2:

Forklar, hvordan man ud fra grafen kan se, at den hastighed, hvormed pigernes gennemsnitshøjde vokser, aftager efter 12 års alderen.

.....

.....

.....

---

Spørgsmål 3:

I hvilket tidsrum i deres liv er kvinder ifølge denne graf højere end mænd på samme alder?

.....

.....

---

#### 4.5.1 Hvordan tillægges spørgsmål 1, 2 og 3 point?

Pointfordelingen af elevsvar med eksempler fra PISA-kodevejledningen:

##### SPØRGSMÅL 1

Fuldt point

Kode 1: 168,3 cm (enhed er allerede angivet).

Intet point

Kode 0: Andre svar.

Kode 9: Intet svar.



## SPØRGSMÅL 2

### Fuldt point

Pointen er her, at svaret skal henvise til "ændring" i grafens hældning for pigerne. Dette kan gøres eksplicit eller implicit. Kode 11 og kode 12 bruges, hvis kurvens stigning nævnes eksplicit, hvorimod Kode 13 anvendes ved implicit sammenligning ved brug af den aktuelle vækststigning før og efter 12 årsalderen.

Kode 11: Henviser til den reducerede stigning i kurven fra 12 år og opefter ved brug af hverdagsprog, ikke matematisk sprog. Fx:

- Den går ikke længere lige op, den rettes ud.
- Kurven udjævnes.
- Den er fladere efter 12.
- Linjen for pigerne begynder at jævnes ud, og drengenes linje bliver bare større.
- Den udjævnes, og drengenes graf bliver ved med at stige.

Kode 12: Refererer til den reducerede stigning i kurven fra 12 år og opefter ved brug af matematisk sprog.

- Man kan se, at hældningen er mindre.
- Grafens ændringshastighed bliver mindre fra 12 år og opefter.
- Eleven udregnede kurvens vinkler med hensyn til x-aksen før og efter 12 årsalderen. I almindelighed kan ord som hældningskoefficient, hældning eller ændringshastighed betragtes som matematisk sprogbrug.

Kode 13: Sammenligner den aktuelle vækst (sammenligning kan være implicit)

- Fra 10 til 12 år vokser de cirka 15 cm, men fra 12 til 20 er det kun ca. 17 cm.
- Den gennemsnitlige vækstrate fra 10 til 12 er ca. 7,5 cm pr. år, men cirka 2 cm årligt fra 12 til 20 år.

### Intet point

Kode 01: Eleven angiver, at pigernes højde falder under drengenes, men nævner INTET om stigningen i pigernes graf eller en sammenligning af pigernes vækstrate før og efter 12 år.

- Pigernes linje falder under drengenes linje.

Hvis eleven nævner, at pigernes graf bliver mindre stejl, SÅVEL SOM det faktum, at grafen falder under drengenes graf, så gives Fuldt point (Kode 11, 12 eller 13). Vi er ikke ude efter en sammenligning mellem dreng- og pige grafen, så se bort fra enhver reference til en sådan sammenligning og giv bedømmelsen ud fra resten af svaret.

Kode 02: Andre forkerte svar, f.eks. svar, der ikke henviser til grafens karakteristika, idet spørgsmålet klart går på, hvordan GRAFEN viser ...

- Piger modnes tidligere.
- Fordi piger kommer tidligere i puberteten end drenge, og de får vækstspurtten tidligere.
- Piger vokser ikke meget efter 12. [Angiver, at pigernes vækst går langsommere efter 12-årsalderen, men henviser ikke til grafen]

Kode 99: Intet svar.

## SPØRGSMÅL 3

### Fuldt point

Kode 21: Angiver det korrekte interval, fra 11 til 13 år:

- Mellem 11 og 13 år.
- Fra pigerne er 11, til de er 13 år gamle, er de i gennemsnit højere end drengene.
- 11-13.

Kode 22: Angiver, at pigerne er højere end drengene, når de er 11 og 12 år gamle. (Dette svar er rigtigt i almindelig sprogbrug, fordi det betyder intervallet fra 11 til 13).

- Pigerne er højere end drengene, når de er 11 og 12 år gamle.
- 11 og 12 år gamle.

Delvist point

Kode 11: Andre delmængder af (11, 12, 13), der ikke er inkluderet i Fuldt point

- 12 til 13.
- 12.
- 13.
- 11.
- 11,2 til 12,8.

Intet point

Kode 00: Andre svar:

- 1998
- Pigerne er højere end drengene, når de er mere end 13 år.
- Pigerne er højere end drengene fra 10 til 11.

Kode 99: Intet svar.

#### 4.5.2 Hvilke informationer kan opgaven give?

Karakteristika ved spørgsmål 1:

PISA 2003 kategoribeskrivelser	
IDÉOMRÅDE	Forandringer og sammenhænge
KONTEKST	Science / Naturvidenskabelig
KOMPETENCEKLASSE	Reproduktionskompetence
FORMAT	Kort svar
SVÆRHEDSGRAD	477 niveau 2

Karakteristika ved spørgsmål 2:

PISA 2003 kategoribeskrivelser	
IDÉOMRÅDE	Forandringer og sammenhænge
KONTEKST	Science / Naturvidenskabelig
KOMPETENCEKLASSE	Sammenhængskompetence
FORMAT	Redegørelsessvar (Udvidet svar)
SVÆRHEDSGRAD	574 niveau 4

Karakteristika ved spørgsmål 3:

PISA 2003 kategoribeskrivelser	
IDÉOMRÅDE	Forandringer og sammenhænge
KONTEKST	Science / Naturvidenskabelig
KOMPETENCEKLASSE	Reproduktionskompetence
FORMAT	Kort svar
SVÆRHEDSGRAD	420 niveau 1-2 for delvist svar; 525 niveau 3 for fuldt svar

4.5.3 Hvordan besvarede danske elever opgaven sammenlignet med elever i andre lande?

Svarprocenternes fordeling i Danmark og andre lande i SPØRGSMÅL 1:

Land	0 point	1 point	Ikke besvaret	Piger	Drenge	Alle
Danmark	24	68	9	64	72	68
Finland	26	67	7	66	69	67
Island	19	76	6	76	75	76
Norge	20	71	9	71	70	71
Sverige	18	76	6	76	77	76
Tyskland	20	71	9	68	75	71
Holland	26	73	1	71	76	73
USA	41	54	5	52	57	54
Japan	13	78	9	80	76	78
Tyrkiet	42	46	12	44	47	46
Mexico	54	35	11	34	36	35
OECD	25	68	8	66	69	68

Svarprocenternes fordeling i Danmark og andre lande i SPØRGSMÅL 2:

Land	0 point	1 point	Ikke besvaret	Piger	Drenge	Alle
Danmark	27	50	23	52	48	50
Finland	25	68	7	73	63	68
Island	38	47	15	50	44	47
Norge	38	42	20	42	41	42
Sverige	30	50	19	51	50	50
Tyskland	27	47	26	47	47	47
Holland	22	78	0	75	80	78
USA	40	53	8	51	54	53
Japan	27	43	29	45	42	43
Tyrkiet	43	30	27	30	31	30
Mexico	69	7	24	7	7	7
OECD	34	46	21	46	45	46

Svarprocenternes fordeling i Danmark og andre lande i SPØRGSMÅL 3.

Den samlede rigtighedsprocent beregnes som procenten for 2 points plus halvdelen af procenten for 1 point. Fx for Danmark  $59 + \frac{1}{2} \cdot 30 = 74$ :

Land	0 point	1 point	2 point	Ikke besvaret	Piger	Drenge	Alle
Danmark	5	30	59	6	74	73	74
Finland	5	26	67	2	82	78	80
Island	8	29	60	3	78	72	75
Norge	9	25	60	6	76	69	73
Sverige	5	37	55	3	75	72	73
Tyskland	7	22	61	10	71	74	72
Holland	10	23	67	0	78	79	79
USA	13	43	39	4	62	60	61
Japan	6	24	63	8	78	72	74
Tyrkiet	20	30	33	17	50	47	48
Mexico	32	32	24	12	42	38	40
OECD	10	28	55	7	70	68	69

#### 4.5.4 Hvordan besvarede danske elever opgaven? Analyse af originalsvar

##### SPØRGSMÅL 1

Langt de fleste af eleverne svarer 168,3.

Viser med udregning, hvordan de får 168,3(  $170,6 - 2,3 = 168,3$  ).

Nogle svarer 172,9.

Nogle svarer 172,9 med udregning ( $170,6 + 2,3 = 172,9$ ).

Nogle svarer 155 129,6 170 105,3 130 41,4 eller 392,38. Fx skriver en elev: ' jeg regnede  $170,6 \cdot 2,3$  ud og fik det til 392,38 cm'.

##### SPØRGSMÅL 2

Nogle argumenterer med, at grafen flader ud (her er der mange forskellige formuleringer).

Nogle argumenterer med, at pigerne kommer i puberteten eller får menstruation.

Nogle argumenterer ved sammenligning med drengenes kurve.

Nogle argumenterer ved aflæsning. Elever skriver fx 'Fra 10-12 vokser pigerne 20 cm', 'Fra 12-20 15' eller lignende.

##### SPØRGSMÅL 3

Langt de fleste svarer: 11-13, mellem 11 og 13 år, hvoraf nogle har tilføjet 's alderen'.

Nogle svarer 'I 12 års alderen'.

Nogle svarer 11-12 år(s alderen ).

Nogle svarer 12-13 år(s alderen ).

Nogle tilføjer til deres svar, hvor høje pigerne er i det angivne tidsrum

## 4.6 DEN BEDSTE BIL

Et bilmagasin bruger et pointsystem til at bedømme nye biler og uddeler prisen "Årets Bil" til den bil, der opnår det højeste pointtal. Fem nye biler er lige blevet bedømt, og deres point kan ses i tabellen.

Bil	Sikkerheds- udstyr (S)	Brændstof- økonomi (B)	Ydre udseende (Y)	Indvendigt udstyr (U)
Ca	3	1	2	3
M2	2	2	2	2
Sp	3	1	3	2
N1	1	3	3	3
KK	3	2	3	2

Pointene har følgende betydning:

3 point = Fremragende

2 point = God

1 point = Rimelig

---

Spørgsmål 1:

For at beregne en bils samlede pointtal benytter bilmagasinet følgende regel, som er en vejet sum af de enkelte pointtal:

$$\text{Samlet pointtal} = (3 \cdot S) + B + Y + U$$

Beregn det samlede pointtal for bilen "Ca". Skriv dit svar på linjen nedenfor.

Samlet pointtal for "Ca": .....

---

#### 4.6.1 Hvordan tillægges spørgsmål 1 point?

Pointfordelingen af elevsvar med eksempler fra PISA-kodevejledningen:

Fuldt point

Kode 1: 15 point.

Intet point

Kode 0:

Kode 9: Intet svar

#### 4.6.2 Hvilke informationer kan spørgsmål 1 give?

Karakteristika ved spørgsmål 1:

PISA 2003 kategoribeskrivelser	
IDÉOMRÅDE	Forandringer og sammenhænge
KONTEKST	Samfundsliv
KOMPETENCEKLASSE	Kompetenceklasse1: Reproduktionskompetence
FORMAT	Kortsvars – opgave
SVÆRHEDSGRAD	

#### 4.6.3 Hvordan besvarede danske elever opgaven sammenlignet med elever i andre lande?

Svarprocenternes fordeling i Danmark og andre lande:

Land	0 point	1 point	Ikke besvaret	Piger	Drenge	Alle
Danmark	13	80	7	82	78	80
Finland	20	76	4	77	74	76
Island	19	67	12	70	68	67
Norge	30	56	14	58	55	56
Sverige	31	57	11	60	54	57
Tyskland	14	77	9	78	76	77
Holland	16	78	6	81	75	78
USA	16	75	9	79	70	75
Japan	13	80	7	80	79	80
Tyrkiet	24	61	15	66	58	62
Mexico	32	44	24	44	43	44
OECD	17	73	10	74	71	73

Der er to bemærkelsesværdige resultater ved elevernes besvarelse af denne opgave. For det første at danske elever har haft en god forståelse af opgaven og besvarelsen af denne, hvilket fremgår af at danske elever har den højeste rigtighedsprocent blandt de udvalgte lande i tabellen, hvor kun japanske elevers besvarelser er på samme niveau. Der er således omkring 25 % flere elever der besvarer opgaven rigtigt i forhold til eleverne i Sverige og Norge.

Det andet og måske endnu mere bemærkelsesværdige resultat er, at pigerne i ingen af de viste lande præsterer ringere end drenge, hvilket er meget sjældent i internationale testopgaver.

Danske piger præsterer med en rigtighedsprocent på 82 % allerhøjest af de i tabellen medtagne grupper. Det, de danske elever og specielt pigerne viser i denne opgave, er, at de kan aflæse/hente informationer fra en tabel, indsætte dem i en given formel og udføre en meget simpel udregning. Hvorfor præsterer piger bedre end drenge i alle de viste lande? Konteksten kan vel ikke siges at være specielt interessant og motiverende for piger, måske snarere tværtimod? Baggrunden skal nok mere søges i, at opgaven kræver en omhyggelig aflæsning og indsættelse af data, der erfaringsmæssigt udføres lidt mere korrekt af piger.

Der er omkring 7 % af de danske elever som ikke forsøger at svare på denne opgave, hvilket måske kan skyldes den forholdsmæssig store mængde information i form af både tabel og formel. Måske er det svage læsere og elever med manglende selvværd i forhold til matematik, der afstår fra at gå i gang med opgaven.

#### 4.6.4 Hvordan besvarede danske elever opgaven? Analyse af originalsvar

Med en rigtighedsprocent på 80 % ser det ud til, at langt de fleste elever, når de forlader folkeskolen, kan indsætte i en given simpel formel og udføre en simpel udregning.

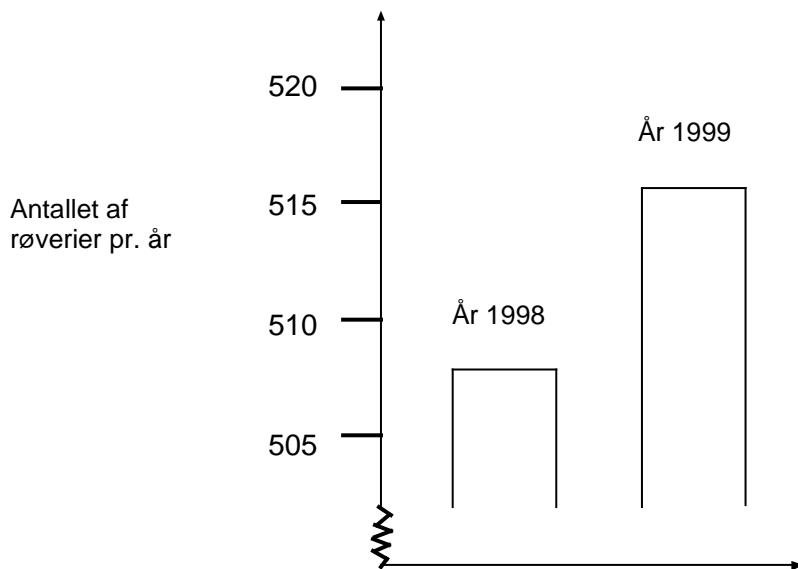
Besvarelser der har fået 0 point varierer meget fra svaret 5 til svaret 70. Dog er der omkring 10 % af eleverne der svarer 9, som formodentligt er fremkommet ved at lægge tallene i tabellen ud for "Ca" sammen:  $3 + 1 + 2 + 3 = 9$  og dermed helt se bort fra formlen eller ikke forstå 3 foran som en faktor.

Omkring 3 % af giver værdien 70 som svar. Dette fremkommer ved, at eleven lægger summen af tallene i hver søjle sammen og ganger den første søjle med 3:  
 $3((3+2+3+1+3) + (1+2+1+3+2) + (2+2+3+3+3) + (3+2+2+3+2)) = 70$ . Disse elever har faktisk vist den matematikinterne forståelse, som opgaven søger at afdække, men enten har de forståelsesproblemer med teksten, eller de er så usikre på tolkningen af, hvad hun eller han kan og ikke kan. Eleverne gør så for "en sikkerheds skyld" noget ved ALLE tallene.

## 4.7 RØVERIER

En tv-journalist viste dette diagram og sagde:

“Diagrammet viser, at der har været en voldsom stigning i antallet af røverier fra 1998 til



1999.”

Er journalistens påstand en rimelig fortolkning af diagrammet?

Gør rede for, om fortolkningen er rimelig eller urimelig.

---

### 4.7.1 Hvordan tillægges opgaven point?

Pointfordelingen af elevsvar med eksempler fra PISA-kodevejledningen:

Fuldt point

Kode 21:

Nej, ikke rimelig. Fokuserer på det faktum, at der kun er vist en LILLE DEL af grafen. Svareksempler:

Ikke rimelig. Hele grafen skulle være vist.

Jeg synes ikke, at det er en rimelig fortolkning af grafen, for hvis de havde vist hele grafen, ville man have kunnet se, at der kun er en lille stigning i røverierne.

Nej, fordi han har brugt den øverste bid af grafen, og hvis man så på hele grafen fra 0 – 520, ville den ikke have haft så stor stigning.

Nej, fordi grafen får det til at se ud som om, der har været en stor stigning, men hvis man ser på antallet, har der ikke været nogen stor stigning.



Kode 22:

Nej, ikke rimelig. Indeholder korrekte argumenter, hvor termer for FORHOLD mellem tal eller PROCENTVIS STIGNING indgår. Svareksempler:

Nej, ikke rimelig. 10 er ikke nogen stor stigning sammenlignet med det samlede tal på 500.

Nej, ikke rimelig. Ifølge procentdelen er stigningen kun på 2 %.

Nej, 8 røverier er ikke mere end 1,5 % forhøjelse. Ikke meget efter min mening!

Nej, kun 8 eller 9 flere dette år. Sammenlignet med 507 er det ikke noget stort tal.

Kode 23:

Data for udvikling er nødvendige, førend man kan dømme. Svareksempler:

Vi kan ikke sige, om stigningen er voldsom eller ej. Hvis antallet af røverier i 1997 var det samme som i 1998, så kunne vi sige, at der var tale om en voldsom stigning i 1999.

Der er ingen, der ved, hvad "voldsom" dækker, fordi der mindst må være tale om to ændringer for at kunne tænke på stor og lille.

Delvist point

Kode 11:

Nej, ikke rimelig, men forklaring er ikke detaljeret. Fokuserer KUN på en stigning angivet ved det nøjagtige antal røverier, men sammenligner ikke med det totale antal. Svareksempler:

Ikke rimelig. Det steg med ca. 10 røverier. Ordet "voldsom" forklarer ikke, hvad det forøgede antal røverier var i virkeligheden. Stigningen var kun 10, og det vil jeg ikke kalde en "voldsom" stigning. Fra 508 til 515 er ikke nogen stor stigning.

Nej fordi 8 eller 9 ikke er et stort antal.

På en måde. Fra 507 til 515 er en stigning, men ikke en voldsom stigning.

Fordi skalaen ikke er tydelig på grafen, accepteres besvarelser, der angiver mellem 5 og 15 som det øgede antal røverier.

Kode 12:

Nej, ikke rimelig. Enten med rigtig metode og mindre regnefejl. Eller rigtig metode og konklusion, men den beregnede procentdel er 0,03 %.

Intet point.

Intet point

Kode 01:

Nej, med utilstrækkelig eller urigtig forklaring

Nej, jeg er ikke enig

Journalisten skulle ikke have brugt ordet "voldsom"

Nej, det er ikke rimeligt. Journalister kan altid godt lide at overdrive.

Kode 02:

Ja, og fokuserer på grafens udseende og nævner, at antallet af røverier er fordoblet.

Svareksempler:

Ja, grafens højde er dobbelt så stor

Ja, antallet af røverier er næsten fordoblet

Kode 03:

Ja, men ingen eller andre forklaringer end nævnt i kode 2

Kode 04: Andre svar

Kode 09: Intet svar

#### 4.7.2 Hvilke informationer kan opgaven give?

Karakteristika ved opgaven:

PISA 2003 kategoribeskrivelser	
IDÉOMRÅDE	Usikkerhed
KONTEKST	Samfundsliv
KOMPETENCEKLASSE	Sammenhængskompetence
FORMAT	Redegørelsessvar (Udvidet svar)
SVÆRHEDSGRAD	577 niveau 4 ved delvist korrekt, 694 niveau 6 ved fuldt korrekt

Opgavetyperen er åben, og besvarelsen skal indeholde en argumentation for den konklusion, der angives, så opgavens format er redegørelsessvar. Konteksten er samfundsliv, da opgaven går ud på at vurdere en påstand, der fremsættes på baggrund af en statistisk afbildning, som man dagligt kan møde i medierne. Idéområdet er Usikkerhed. Da vurderingen skal ske ud fra en fra en tolkning af et diagram, kræves der sammenhængskompetence. Opgaven kan besvares på to niveauer. Et delvist korrekt svar, hvor der er en svag argumentation for at forkaste påstanden giver 1 point. Sværhedsgraden er 577, der placerer besvarelsen på niveau 4. En korrekt besvarelse, der skal indeholde ræsonnementer med brug af relative forhold, giver 2 point og er placeret på niveau 6, med en sværhedsgrad på 694, hvilket gør spørgsmålet til et af de vanskeligste at besvare i undersøgelsen. Formatet er udvidet svar, og det giver god mulighed for at vurdere korrektheden af et svar både som fuldt og som delvist korrekt.

Eleven skal tolke og vurdere, hvilke informationer der med rimelighed kan indhentes ud fra en given grafisk fremstilling af to på hinanden følgende statistiske undersøgelser vedrørende røverier. Informationerne er gengivet grafisk ved to søjlediagrammer, hvor en del af de to søjler er gengivet. Opgaven går ud på at se og forstå en forandring/vækst og se denne i sammenhæng med den samlede størrelse, altså antallet af røverier.

Konteksten formodes at tilhøre den sfære omkring elevens dagligliv, der omhandler samfundet, som indeholder situationer, der tilhører en sfære, eleven kun indirekte er i kontakt med. Korrekt besvarelse af opgaven kræver sammenhængskompetence. En korrekt besvarelse skal indeholde en vurdering, der påpeger det urimelige i journalistens fortolkning og begrunde det med den afkortede y-akse i den grafiske fremstilling.

#### 4.7.3 Hvordan besvarede danske elever opgaven sammenlignet med elever i andre lande?

Svarprocenternes fordeling i Danmark og andre lande.

Rigtighedsprocenten beregnes som procent for 2 point plus halvdelen af procent for 1 procent, fx 19 + 15 for danske elever:

Land	0 point	1 point	2 Point	Ikke besvaret	Piger	Drenge	Alle
Danmark	33	30	19	19	32	36	34
Finland	31	38	27	4	44	47	46
Island	45	24	16	15	29	27	28
Norge	26	26	29	19	41	42	42
Sverige	29	26	33	13	47	43	45
Tyskland	42	28	15	15	26	31	29
Holland	45	31	22	2	35	40	38
USA	43	33	17	8	31	35	33
Japan	39	35	11	14	27	31	29
Tyrkiet	60	13	6	20	11	14	13
Mexico	60	14	6	20	13	12	13
OECD	41	28	15	15	28	31	30

Som det fremgår af tabellen, har mange elever i alle de deltagende lande haft svært ved at besvare denne type opgave, som må siges at være meget relevant set ud fra en målsætning om dannelse af samfundsborgere, der er i stand til på et sagligt grundlag at kunne deltage i den demokratiske debat.

De angivne procenter for drenge, piger og alle dækker som nævnt både over korrekte og delvis korrekte besvarelser, således dækker de 34 %, som er den danske rigtighedsprocent, over, at 19 % af besvarelserne var korrekte og 30 % delvis korrekte. Et tilsvarende tal for finske elever – de internationale topscorere – var henholdsvis 38 % og 27 %. Elever i Finland, Norge og Sverige præsterer relativt godt.

#### 4.7.4 Hvordan besvarede danske elever opgaven? Analyse af originalsvar

Da opgavens format er et udvidet redegørelsessvar, er det både de korrekte besvarelser – fuldt og delvist korrekte – og de forkerte besvarelser, det er relevant at gå i dybden med. PISA-kodevejledningens mange delkoder, hvor ciffer nr 2 angiver elevens tankegang, bliver eksemplificeret således af danske elevsvar:

Kode 21 eksempler på danske elevers svar med 'nej, ikke rimelig', som fokuserer på det faktum, at der kun er vist en lille del af grafen. Eksempler:

- Den er klart urimelig, godt nok ser det vildt ud på diagrammet, men det er pga. "knækket" på den ene akse i starten, hvis den var vist i fuld størrelse, ville der ikke være særlig stor forskel.
- Urimelig fordi enhederne på y-aksen er meget små.
- Der er sket en udvikling. Der er kommet flere røverier, men det det er ikke voldsomt. Det er steget med ca. 8 (aflæst på grafen) røverier, og det er ikke ret meget. Journalisten har overdrevet, men når man ser grafen ser det slemt ud, men benævnelserne er ret tæt på hinanden, derfor vil en stigning på 8 se voldsom ud på grafen.

- Den er urimelig, for enhederne på diagrammet er meget små, så på tegningen ser det måske ud af meget, men i virkeligheden er det meget lidt.
- Fortolkningen er ikke rimelig, idet kun den øverste del af diagrammet vises. Man manipuleres til at tro, at røveriantallet er fordoblet, men i virkeligheden er stigningen kun på otte røverier (ud af 516).
- Den er urimelig, fordi at det ser ud af meget, men i virkeligheden starter hans diagram først ved 490, så det er faktisk en lille brøkdel.
- Diagrammet er meget urimeligt, da hver blok er meget stor. Det er simpelthen synsbedrag.
- Det er en urimelig tolkning af diagrammet, efter som stigningen kun ser meget voldsom ud, fordi man har fjernet de første 500 røverier.
- Den er aldeles urimelig. Diagrammet er bare "strukket ud" hvis man kan sige sådan!!

Kode 22 eksempler på danske elevers svar med 'nej, ikke rimelig', som indeholder korrekte argumenter, hvor termer for forhold eller procentvis stigning indgår. Eksempler:

- Jeg synes, det er urimeligt, for det er kun steget med ca. 10 røverier på et år, og når man tænker på, at det i alt var ca. 516 røverier i 1999, så er det ikke så stor en forskel, det er i hvert fald ikke en voldsom stigning, som journalisten fortolker det som.
- Jeg mener, at tolkningen er urimelig, da der er tale om en stigning på 8 røverier ud af de omkring 500 røverier årligt. Danmarks befolkning stiger jo også konstant, og der er derfor ikke noget underligt i en stigning så lille som denne.
- Påstanden er meget urimelig, det er jo kun 8 røverier mere, ud over de 500. 2 % mere = urimeligt.
- Forskel:  $515 - 508 = 7$ .
- Stigning:  $(7/508 * 100) \% = 1,38 \%$ .
- Det er en urimelig fortolkning, fordi den kun er steget med 1,38 %.
- Procentvis er stigningen ikke stor. Så det er en urimelig fortolkning.

Kode 23 eksempler på danske elevers svar, med angivelse af, at der er for få data. Eksempler:

- En så lille stigning tilfældigheder, og det næste år kan der være en markant nedgang af røverier. Så jeg mener, at det er en urimelig fortolkning.
- Man kan ikke se en statistik over forrige år, så man kan ikke se, om det er en normal stigning eller en voldsom stigning. Derfor vil jeg sige, at det er en urimelig fortolkning.

Kode 11 eksempler på danske elevers svar med 'nej, ikke rimelig' med forklaring, der ikke er detaljeret. Eksempler:

- Nej, den er kun steget med 8 røverier! Så den er ikke steget voldsomt.
- Det er urimeligt at sige, at den er voldsom stigende, når det kun er 7-8 røverier mere, vi snakker om!
- Den er ikke rimelig, for den er kun steget med ca. 8.
- Nej det er ikke en voldsom stigning ( $515-507=8$  røverier mere).
- Urimeleg, stigning på ca. 6 røverier.
- Fortolkningen er urimelig! Fordi at hver streg på tabellen kun har et interval på 5, så i alt er der kun en stigning på 8 røverier, og det er ikke voldsomt meget.
- Jeg synes ikke, 9 røverier er en voldsom stigning

- Den er urimelig, da man ikke kan se bunden, faktisk er den ikke engang steget med 10, men ligner faktisk en fordobling.

Kode 12 eksempler på danske elevers svar med 'nej, ikke rimelig' med korrekt tankegang og mindre regnefejl. Eksempel:

- 17 røverier mere pr. år???????

Kode 01 eksempler på danske elevers svar med 'nej' med ingen, utilstrækkelig eller urigtig forklaring. Eksempler:

- Nej!
- Den er urimelig. Det lyder helt overdrevet.
- Nej, for så mange røverier har der ikke været fra 1998-1999.
- Urimelig!
- Jeg syntes den er urimelig, han kunne godt have fortalt noget i %.
- Urimelig. Hvor har hun oplysningerne fra??

Kode 02 eksempler på danske elevers svar med ja'ja', som fokuserer på grafens udseende og nævner, at antallet af røverier er fordoblet. Eksempler:

- Jeg synes, at den er rimelig, fordi at antallet af røverier er steget med næsten 50 %.
- Journalistens påstand er rimelig, da diagrammet over 1999 er dobbelt så stort som i 1998.
- Fortolkningen er rimelig, da antallet af røverier er mere end fordoblet.

Kode 03 eksempler på danske elevers svar med ja'ja' med ingen eller andre forklaringer end nævnt i kode 02. Eksempler:

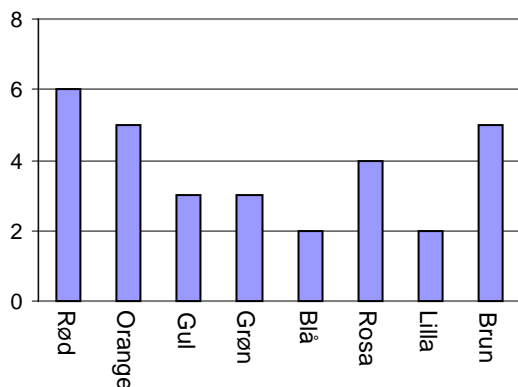
- Jeg synes, den er rimelig, fordi at jeg har hørt, at der har været flere røverier i 1999 end i 1998.
- Rimelig
- Stigning på 7 = rimelig.
- Fortolkningen er meget rimelig, den er jo let at forstå.
- Hvad mener I? Den er rimelig, men hvordan skal jeg vise det?
- Diagrammet viser en stigning på næsten 10 røverier mere fra 1998 til 1999.
- Rimelig. Det er det vel, man kan bare ikke se præcis, hvor mange indbrud der var i 1998. Det ville være bedre at se på et linje diagram.
- Den er rimelig, for som man kan se, stiger den.
- Ja!
- Den er nok ikke så urimelig, der er ca. en stigning på 4 røverier.
- Jeg syntes, den er rimelig, for det er sandheden.
- Man kan jo se en kæmpe stigning.
- Den er klart rimelig, da der er en difference på de to årstal, og at den difference siger, at der er flere røverier i år 1999.

Kode 04 eksempler på danske elevers svar, som rubriceres som såkaldt 'andre svar'. Eksempler:

- X (kryds).
- Det ville være nemmere, hvis I viste det på et cirkeldiagram i stedet.
- Fordi den er steget.
- Det er urimeligt, fordi det ser ud af mere, men det er ikke matematisk urimeligt, hvis han bruger de rigtige tal.
- Det er rigtigt.

## 4.8 FARVEDE BOLSJER

Roberts mor lader ham vælge et bolsje fra en pose. Han kan ikke se bolsjerne. Antallet af bolsjer i hver farve i posen vises i følgende diagram.



Hvor stor er sandsynligheden for, at Robert tager et rødt bolsje?

Sæt ring om bogstavet foran det rigtige svar.

- A 10 %
- B 20 %
- C 25 %
- D 50 %

---

### 4.8.1 Hvordan tillægges opgaven point?

Pointfordelingen af elevsvar med eksempler fra PISA-kodevejledningen:

Denne opgave er en multiple-choice opgave eller flervalgsopgave, og der gives kun point for det korrekte valg af svar. Korrekt svar er B.

### 4.8.2 Hvilke informationer kan opgaven give?

Karakteristika ved opgaven:

PISA 2003 kategoribeskrivelser	
IDÉOMRÅDE	Usikkerhed
KONTEKST	Det personlige liv
KOMPETENCEKLASSE	Reproduktionskompetence
FORMAT	Multiple-choice (flervalgsopgave)
SVÆRHEDSGRAD	549 niveau 4

Eleverne skal i denne opgave vise, at de kender eller kan beregne sandsynligheden i symmetrisk udfaldsrum,  $P(\text{rødt bolsje}) = \frac{\text{antal røde bolsjer}}{\text{samlede antal af bolsjer}} = \frac{6}{30}$ , og omskrive et brøktal,  $\frac{6}{30}$ , til procenttal, 20 %. Idéområdet er oplagt Usikkerhed, som sandsynligheder henhører til under, og konteksten beskriver en type af situation, som de fleste elever har oplevet, derfor er opgaven kategoriseret som det personlige liv. At kunne optælle "gunstige" ud af "mulige" udfald er en reproduktionskompetence. Opgaveformatet er som nævnt en flervalgsopgave, hvor et ræsonnement alene ud fra de mulige svar nok kun kan udelukke svarmulighederne A og D, på henholdsvis 10 % og 50 %. Blot ved at se på diagrammet vil det kunne udelukkes af mange elever, men at skelne mellem 20 % og 25 %, som i svarmulighederne B og C, er vanskeligt og kræver beregning.

#### 4.8.3 Hvordan besvarede danske elever opgaven sammenlignet med elever i andre lande?

Svarprocenternes fordeling i Danmark og andre lande:

Land	0 point	1 point	Ikke besvaret	Piger	Drenge	Alle
Danmark	32	66	2	63	70	66
Finland	39	60	1	57	62	60
Island	22	76	2	77	76	76
Norge	39	58	3	55	62	58
Sverige	27	61	2	56	66	61
Tyskland	48	50	2	44	55	50
Holland	31	69	0	67	71	69
USA	46	53	1	49	56	53
Japan	35	64	1	62	67	64
Tyrkiet	65	33	2	28	38	33
Mexico	77	19	4	16	23	19
OECD	48	50	2	46	55	50

De danske elever præsterer et godt stykke over det internationale gennemsnit og relativt højt blandt i nordiske lande. Alligevel er det værd at bemærke, at hver tredje elev ikke klarer at besvare denne reproduktionskompetence-opgave korrekt, der er stillet i en situation, der må antages at være velkendt af eleverne. Det er ligeledes værd at bemærke, at det er drenge, der generelt præsterer bedre end pigerne på denne opgave, hvilket kan udelukkes at være på grund af opgaveformatet, da erfaringer viser, at pigerne har mindre tilbøjelighed til at tage chancen og krydse af ved et svar uden at vide, om dette er korrekt.

#### 4.8.4 Hvordan besvarede danske elever opgaven? Analyse af originalsvar

Originalsvar er fordelt på de fire mulige svar således:

A: 11 % (svar 10 %)    B: 66 % (svar 20 %)    C: 15 % (svar 25 %)    D: 7 % (svar 50 %)

Det samme svarmønster går igen i alle de nordiske lande; dog skal det bemærkes, at islandske elever præsterer meget højt og har meget få elever, der tror på svaret D på 50 %. I de andre nordiske lande er procenterne på svaret D tæt på de danske 7 %. I Finland er det 8 %, i Norge 7 % og i Sverige 9 %.

## 4.9 PRØVER I NATUR/TEKNIK

På Maries skole bliver der holdt prøver i faget natur/teknik, hvor man kan få op til 100 point. Marie har et gennemsnit på 60 point i sine fire første prøver i natur/teknik. I den femte prøve fik hun 80 point.

Hvad er gennemsnittet af Maries point i natur/teknik efter alle fem prøver?

Gennemsnit: .....

---

### 4.9.1 Hvordan tillægges opgaven point?

Pointfordelingen af elevsvar med eksempler fra PISA-kodevejledningen:

Fuldt point

Kode 1: 64

Intet point

Kode 0: Andre svar

Kode 9: Ikke besvaret

### 4.9.2 Hvilke informationer kan opgaven give?

Karakteristika ved opgaven:

PISA 2003 kategoribeskrivelser	
IDÉOMRÅDE	Størrelser
KONTEKST	Uddannelses – og arbejdsliv
KOMPETENCEKLASSE	Reproduktionskompetence
FORMAT	Kort svar
SVÆRHEDSGRAD	556 niveau 4



#### 4.9.3 Hvordan besvarede danske elever opgaven sammenlignet med elever i andre lande? Svarprocenternes fordeling i Danmark og andre lande:

Land	0 point	1 point	Ikke besvaret	Piger	Drenge	Alle
Danmark	35	50	15	47	53	50
Finland	36	53	11	53	53	53
Island	52	39	9	37	40	39
Norge	30	58	12	59	57	58
Sverige	37	45	19	45	45	45
Tyskland	28	46	26	44	49	46
Holland	36	57	7	57	58	57
USA	32	55	13	54	55	55
Japan	28	63	9	58	67	63
Tyrkiet	51	34	15	29	39	34
Mexico	59	24	18	22	25	24
OECD	37	47	16	45	49	47

Danske elever præsterer lidt over OECD-gennemsnittet på denne opgave. Det ser ud til, at begrebet gennemsnit giver anledning til en atypisk fordeling af præstationerne i de nordiske lande, hvor for eksempel de islandske drenge for engang skyld præsterer bedre end pigerne, og Norge præsterer bedst blandt de nordiske lande både hos pigerne og drengene.

#### 4.9.4 Hvordan besvarede danske elever opgaven? Analyse af originalsvar

I de 367 opgavebesvarelser, vi har analyseret i dybden, har cirka halvdelen givet svaret 64. Disse elever har ganget 60 med fire, lagt 80 til, og dette resultat har eleverne divideret med fem, og er nået til det korrekte resultat.

Det mest typiske forkerte svar er 70 beregnet som  $(80 + 60) : 2$ . Det drejer sig om, at tolv procent af eleverne ikke tager højde for, at gennemsnittet 60 er opnået gennem fire prøver og må tælle med fire gange.

Seks procent af eleverne får resultatet 76 beregnet som  $(5 * 60 + 80) : 5$ . Det vil sige, at de tænker, at gennemsnittet på 60 også gælder for den femte prøve, samtidig med at de indregner 80 for den femte prøve.

Fire procent af eleverne giver resultatet 28 beregnet som  $(80 + 60) : 5$ . Her lægges de to tal 80 og 60 sammen, som om det er Maries samlede pointtal opnået i alt gennem fem prøver.

En procent af eleverne angiver 100 som resultat. Disse elever tænker slet ikke i gennemsnit. De lægger Maries points sammen, men da hun højst kan få 100, så mener eleverne at Marie får 100.

Der er også en procent af eleverne, der angiver resultater på mere end 100. Eleverne anerkender altså ikke oplysningen om, at 100 er maksimum.

En elev giver resultatet 71,4. Eleven har først lagt 60 og 80 sammen og fået 140. Derefter har eleven divideret 100 med 140.

To procent af eleverne får resultater som er mindre end 32.

To procent af eleverne får resultater tæt på 64 og har måske anvendt korrekt tankegang, men har lavet regnefejl. Nogle af svarene 65 67 67,2 ca 66 68,5 og 69,6 kan måske også være fremkommet ved overslagsberegning.

## 4.10 AFFALD

I forbindelse med en hjemmeopgave om miljøet indsamlede nogle elever oplysninger om nedbrydningstiden for de forskellige typer affald, som folk smider væk:

Affaldstype	Nedbrydningstid
Bananskal	1–3 år
Appelsinskal	1–3 år
Papkasser	0,5 år
Tyggegummi	20–25 år
Aviser	Et par dage
Plasticbægre	Over 100 år

En elev har tænkt sig at præsentere resultaterne i et søjlediagram.

Angiv én grund til, at et søjlediagram er uegnet til præsentation af disse data.

### 4.10.1 Hvordan tillægges opgaven point?

Pointfordelingen af elevsvar med eksempler fra PISA-kodevejledningen:

Fuldt point.

Kode 1:

Den angivne grund er baseret på den meget store variation i data, fx

- Forskellene i længden på søjlerne i søjlediagrammet ville være alt for stor.

- Hvis man laver en søjle på 10 centimeter til plastic, ville søjlen til papkasser være på 0,05 centimeter.

Eller den angivne grund fokuserer på variabiliteten af data for nogle kategoriers vedkommende, fx.

- Længden på søjlen til "plasticbægre" er ubestemt.
- Man kan ikke lave en søjle til 1–3 år eller en søjle til 20–25 år.

Intet point

Kode 0: Andre svar, fx

- Fordi det ikke vil fungere.
- Et piktogram er bedre.
- Informationerne kan ikke efterkontrolleres.
- Fordi tallene i tabellen kun er tilnærmelser.

Kode 9: Intet svar

#### 4.10.2 Hvilke informationer kan opgaven give?

Karakteristika ved opgaven

PISA 2003 kategoribeskrivelser	
IDÉOMRÅDE	Usikkerhed
KONTEKST	Science – Naturvidenskabelig
KOMPETENCEKLASSE	Refleksionskompetence
FORMAT	Redegørelsessvar (Udvidet svar)
SVÆRHEDSGRAD	551

#### 4.10.3 Hvordan besvarede danske elever opgaven sammenlignet med elever i andre lande?

Svarprocenternes fordeling i Danmark og andre lande

Land	0 point	1 point	Ikke besvaret	Piger	Drenge	Alle
Danmark	26	57	17	55	58	57
Finland	22	73	6	78	67	73
Island	21	71	7	77	65	71
Norge	21	67	12	67	66	67
Sverige	32	53	16	57	49	53
Tyskland	29	53	18	53	54	53
Holland	39	59	2	59	59	59
USA	76	20	4	17	22	20
Japan	28	60	13	62	57	60
Tyrkiet	43	26	32	26	25	26
Mexico	49	31	20	34	28	31
OECD	32	52	16	53	51	52

De danske elever præsterer over OECD-gennemsnittet, men under de andre nordiske lande, når man ser bort fra de svenske drenge der præsterer atypisk på denne opgave. Dog kan man i denne sammenhæng bemærke at pigerne i Finland, Island og Sverige præsterer markant bedre end drengene, modsat i Danmark hvor drengene præsterer bedre end pigerne.

#### 4.10.4 Hvordan besvarede danske elever opgaven? Analyse af originalsvar

Kode 1 eksempler på svar fra danske elever:

Der er for langt mellem årstallene  
Søjlediagrammet ville blive alt for svingende til at være overskueligt  
Du kan ikke vise et par dage i et søjlediagram det skal være mere præcise tal man har  
Fordi der er for stor afstand mellem nedbrydningstiderne  
Det bliver for stort hvis man skal indeholde 100 år i dage  
Et søjlediagram er uegnet til præsentation af disse data, fordi at Aviser og Plasticbægre ikke kan placeres nøjagtigt i et søjlediagram.  
Søjlediagram er uegnet til præsentation af disse data, da nedbrydningstiden går fra "et par dage" til og med "over hundrede år"  
Nogen af data'erne er opgivet i dage, andre er opgivet i år.  
Der er meget langt imellem den tid det tager for de forskellige affaldstyper at nedbrydes  
Det vil være svært at indtegne aviser da det kun tager "et par dage" at nedbryde.  
Den vil blive kæmpestor hvis den skal være nøjagtig helt nede fra "et par dage" til "over 100 år"  
Fordi y-aksen skulle vise fra "et par dage" til over 100 år og dermed blive for lang

Kode 0 eksempler på svar fra danske elever:

Det er det da det er forskellige ting og kan derfor ikke sættes op i et søjlediagram  
Man kan ikke finde rundt i det  
Fordi en af tiderne er i dage i stedet for i år  
Søjlediagrammet vil ikke kunne vise det  
Ikke alle nedbrydningstider er i intervaller. Søjlediagrammer egner sig.  
Det er ikke præcist nok med de data.  
Fordi tallene mellem årene, et par dage og 100 år ikke passer ikke sammen.  
Fordi det er usikre nedbrydningstider.  
Fordi at et søjlediagram er til at vise målinger. Han skulle bruge et pindediagram i stedet for.  
Årstallet og dagene passer ikke, man ved ikke hvor mange dage det er, det går ikke.  
Det handler ikke om det samme. F. eks. År, dage!  
Det vil være uegnet fordi tingene er så forskellige.  
Tallene er ikke særlige præcise  
Der står ikke mængden af affald som skal nedbrydes  
Fordi det er meget bedre bare at vise det på den måde som det er vist nu, fordi det er meget mere overskueligt.

### **4.11 STEMME PÅ PRÆSIDENTEN**

---

I Zedland blev der gennemført meningsmålinger for at finde tilslutningen til præsidenten ved det forestående valg. Fire avisudgivere foretog hver deres landsdækkende meningsmåling. Resultaterne af de fire avisers meningsmålinger vises nedenfor:

Avis 1: 36,5% (meningsmåling foretaget d. 6. januar på grundlag af svar fra 500 tilfældigt udvalgte borgere med stemmeret)

Avis 2: 41,0% (meningsmåling foretaget d. 20. januar på grundlag af svar fra 500 tilfældigt udvalgte borgere med stemmeret)

Avis 3: 39,0% (meningsmåling foretaget d. 20. januar på grundlag af svar fra 1000 tilfældigt udvalgte borgere med stemmeret)

Avis 4: 44,5% (meningsmåling foretaget d. 20. januar, hvor 1000 læsere ringede ind og stemte).

Hvilken avis' resultat vil sandsynligvis bedst forudsige tilslutningen til præsidenten, hvis valget afholdes d. 25. januar? Giv to grunde, der underbygger dit svar.

#### 4.11.1 Hvordan tillægges opgaven point?

Pointfordelingen af elevsvar med eksempler fra PISA-kodevejledningen:

Fuldt point.

Kode 2:

Avis 3. Meningsmålingen er den nyeste, flest personer udvalgt, deltagerne er tilfældigt udvalgt, og det er kun vælgere, der er blevet spurgt. (svaret bør indeholde mindst to af disse argumenter). Yderligere tilføjelser (herunder irrelevante eller ukorrekt information) bør ignoreres.

Avis 3, fordi den har udvalgt flere stemmeberettigede borgere tilfældigt

Avis 3 fordi den har spurgt 1000 tilfældigt udvalgte personer, og datoen er tættere på valgdatoen, så vælgerne har mindre tid til at skifte mening.

Avis 3 fordi folk blev spurgt tilfældigt, og fordi de havde stemmeret

Avis 3 fordi den spurgte flest personer tættest på datoen

Avis 3 fordi de 1000 personer blev udvalgt tilfældigt

Delvist point tildelt i kodningen, men ikke medtaget i den internationale rigtighedsprocent.

Kode 1:

Avis 3, med kun en grund eller uden forklaring

Avis 3, fordi meningsmålingen er tættere på valgdatoen

Avis 3, fordi flere personer blev spurgt end i avis 1 og avis 2

Avis 3

Intet point.

Kode 0: Andre svar

Avis 4. Flere personer betyde mere præcise resultater, og personer, der ringer ind, har overvejet deres stemme nøjere

Kode 9: Intet svar.

#### 4.11.2 Hvilke informationer kan opgaven give?

Karakteristika ved opgaven

PISA 2003 kategoribeskrivelser	
IDÉOMRÅDE	Usikkerhed
KONTEKST	Samfundsliv
KOMPETENCEKLASSE	Kompetenceklasse: Sammenhængskompetence
FORMAT	Redegørelsessvar(Udvidet svar)
SVÆRHEDSGRAD	615 niveau 5

I denne opgave skal eleverne vise deres viden om hvad der har betydning for gyldigheden og pålideligheden af et statistisk indsamlet data. Da det er statistik der er "matematikken" i en valgsituation, samfundsliv, er idéområdet Usikkerhed. Den kompetence der skal til at besvare opgaven er klart sammenhængskompetence, da denne opgave netop går ud på at vurderer under hvilke omstændigheder er datamateriale er kommet til verden. Opgavetyper er en af de få i PISA-undersøgelserne hvor eleven skal give et udvidet svar, det vil sige at svaret skal begrundes af eleven.

#### 4.11.3 Hvordan besvarede danske elever opgaven sammenlignet med elever i andre lande?

Svarprocenternes fordeling i Danmark og andre lande

Land	0 point	1 Point	2 point	Ikke besvaret	Piger	Drenge	Alle
Danmark	27	7	39	27	38	40	39
Finland	36	7	46	11	47	46	46
Island	34	7	41	17	41	42	41
Norge	32	9	34	25	34	34	34
Sverige	33	7	41	19	39	43	41
Tyskland	25	9	39	27	39	38	39
Holland	35	9	45	10	47	44	46
USA	42	7	34	17	34	33	34
Japan	18	5	47	30	47	46	47
Tyrkiet	40	5	15	40	14	15	15
Mexico	49	7	10	33	11	10	10
OECD	35	7	36	22	35	36	36

Eleverne præsterer som resten af eleverne i undersøgelsen ikke overbevisende på denne opgave, ingen af de viste lande har en rigtighedsprocent på over 50 %, hvilket vil sige at opgaven har været meget svær for eleverne. Dette kan der være flere grunde til, blandt andet at opgaven indeholder meget tekst og at der skal argumenteres ud fra begreber knyttet til statistik mere end der skal beregnes. Der er ikke nogen stor forskel mellem pigernes og

drengenes besvarelse i de forskellige lande inklusiv Danmark.

#### 4.11.4 Hvordan besvarede danske elever opgaven? Analyse af originalsvar

Det er bemærkelsesværdigt at eleverne skriver relativt meget tekst til denne opgave.

Nedenfor er der vist otte eksempler på svar fra danske elever

- kode 2: Avis 3: de har spurgt flere end avis 2 og de har udvalgt borgerne som avis 4 ikke har.
- kode 2: Avis 3 fordi her spørges tilfældige borgere, det kan være både modstandere eller tilhænger. På den måde finder man bedst ud af hvor stor en opbakning præsidenten får af den "almindelige borger". I avis 4, vil jeg tro at flere af dem der ringer ind er tilhængere. Avis et og to er udelukkede, deres meningsmålinger er ældre og er blevet foretaget med halvt så mange borgere.
- kode 2: De havde spurgt 1000 tilfældige, 5 dag før valget. Avis 4 havde fået læsernes meninger, men de var måske lidt påvirkede af de tidligere målinger de havde læst.
- kode 2: Hvis man sammenligner med avis 4 så har avis 3 alle stemmeret. I forhold til aviserne 1-2 så er der 500 flere der har sagt deres mening.
- kode 1: Avis 3 fordi at det var tilfældige borgere, hvorimod Avis 4, der fik en større procent, var det folk som ringede ind og stemte.
- kode 0: Avis 2 er den mest sandsynlige mulighed. Hvorfor? Det er den fordi at de for det første er blevet lavet tæt på det rigtige valg og for det andet har de "kun" spurgt 500 hvor de andre har spurgt 1000, og det giver en større %-del faktisk.
- kode 0: Avis 2 fordi at den giver flere stemmer end avis 1, og den er jo valgt på samme måde. For at det kunne blive avis 3 eller avis 4 burde procenttallet være dobbelt så højt, da der er dobbelt så mange stemmer, men det er ikke tilfældet, så avis 2
- kode 0: flere stemmer og tættere på valget

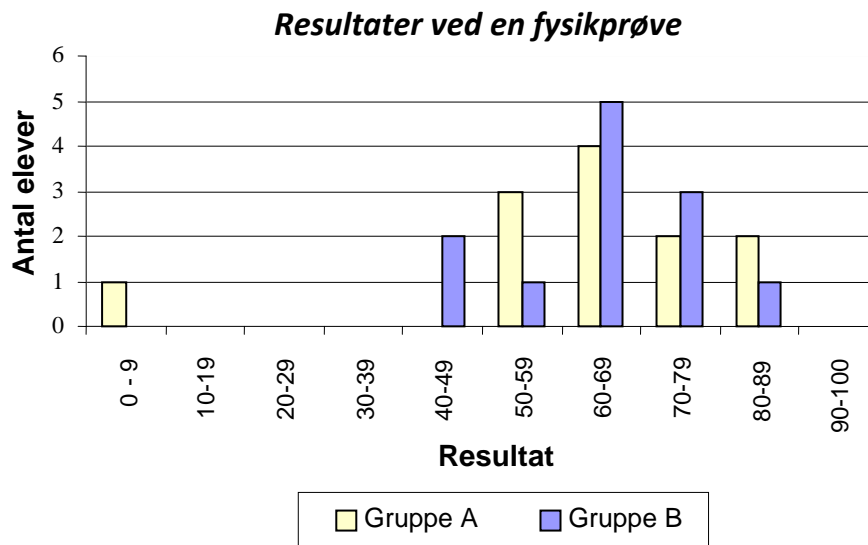
De danske elevers svar er karakteriseret ved at:

- de indeholder relativt megen tekst
- mange elever lægger vægt på procenttallene og knytter dem til pålidelighed.
- nogle elever drager proportionalitet ind mellem antal undersøgt og procentbesvarelsen
- en del mener at når man ringer ind er det ikke tilfældigt men pålideligt
- 9 % af de korrekte svar angiver som begrundelse for Avis 3, at flest personer tættest på datoen var blevet spurgt
- 14 % af de korrekte svar begrundet det med at Avis 3 havde 1000 personer udvalgt tilfældigt
- 8 % af de ikke-korrekte svar begrundet at Avis 4 er svaret med at den havde højest procent og at personerne vil stemme
- 7 % af de ikke-korrekte svar begrundet at Avis 4 er svaret med at deres undersøgelse er tættest på valget og at personerne vil stemme

## 4.12 PRØVERESULTATER

Diagrammet nedenfor viser resultaterne for en fysikprøve for to grupper af elever: Gruppe A og Gruppe B.

Gruppe A's gennemsnitsresultat er 62,0, og Gruppe B's er 64,5. Eleverne består prøven, når deres resultat er 50 eller derover.



Læreren ser på resultaterne og hævder, at Gruppe B klarede sig bedre end Gruppe A i denne prøve.

Eleverne i Gruppe A er ikke enige med deres lærer. De prøver at overbevise læreren om, at Gruppe B ikke nødvendigvis har klaret sig bedre end dem.

Ved brug af diagrammet skal du give et matematisk argument, som eleverne i Gruppe A kunne bruge.



#### 4.12.1 Hvordan tillægges opgaven point?

Pointfordelingen af elevsvar med eksempler fra PISA-kodevejledningen:

Fuldt point.

Kode 1:

Der nævnes mindst et gyldigt argument. Dette skal relateres til antallet af elever der bestod prøven, betydningen af de marginal scorende, herunder antallet af de højest scorende elever.

Mulige svartyper:

Der var flere elever i Gruppe A end i Gruppe B, der bestod prøven.

Hvis man ser bort fra den svageste Gruppe A-elev, klarer eleverne i Gruppe A sig bedre end eleverne i Gruppe B.

Der var flere elever i Gruppe A end i Gruppe B, der fik 80 eller derover.

Intet point.

Kode 0:

Andre svar uden matematiske begrundelser eller forkerte matematiske begrundelser eller svar, som simpelthen beskriver forskelle, der ikke er gyldige argumenter for, at Gruppe B ikke nødvendigvis har klaret sig bedre.

Gruppe A-elever er normalt bedre end gruppe B-elever i fysik. Dette prøveresultat er kun et tilfælde.

Fordi forskellen mellem den højeste og den laveste scorer er mindre for Gruppe B end for gruppe A.

Gruppe A har bedre scoringsresultater i 80-89 området og i 50-59 området.

Kode 9. Intet svar

#### 4.12.2 Hvilke informationer kan opgaven give?

Karakteristika ved opgaven

PISA 2003 kategoribeskrivelser	
IDÉOMRÅDE	Usikkerhed
KONTEKST	Uddannelses – og arbejdsliv
KOMPETENCEKLASSE	Kompetenceklasse 2: Sammenhængskompetence
FORMAT	Redegørelsessvar (Udvidet svar)
SVÆRHEDSGRAD	630 niveau 5

Opgaven omhandler statistiske informationer og konteksten er skolen, derfor Usikkerhed og uddannelses – og arbejdsliv liv som idéområde og kontekst.

Konteksten er kendt fra elevens hverdag i skolen, hvor sammenligninger af prøveresultater er velkendt. Eleven skal i opgaven finde modargumentere ved at analysere og tolke sammenhænge mellem et givet argument og kvantitative informationer. Derfor sammenhængskompetence. Et svar på opgaven kræver et skriftligt formuleret svar der går langt ud over et enkelt tal eller enkelte ord, derfor kræver opgavetyper et redegørelsessvar. Sværhedsgraden er på 630, altså blandt de svære opgaver i PISA 2003. Elever der besvarer denne opgave korrekt viser indsigt i hvordan statistiske grafer kan tolkes og mistolkes. Det vil sige de viser de kan ræsonnere ud fra de givne matematiske informationer, her grafiske repræsentationer, samt kommunikere deres analyser og ræsonnementer.

#### 4.12.3 Hvordan besvarede danske elever opgaven sammenlignet med elever i andre lande?

Svarprocenternes fordeling i Danmark og andre lande

Land	0 point	1 point	Ikke besvaret	Piger	Drenge	Alle
Danmark	26	30	45	28	31	30
Finland	40	35	25	34	36	35
Island	37	39	26	41	38	39
Norge	24	34	42	34	33	34
Sverige	28	43	30	42	43	43
Tyskland	32	27	42	26	28	27
Holland	48	41	11	40	42	41
USA	43	40	18	42	38	40
Japan	21	55	24	52	57	55
Tyrkiet	31	19	50	18	20	19
Mexico	33	10	58	11	8	10
OECD	33	32	35	32	32	32

Det er cirka en tredjedel af de danske elever der kan besvare denne opgave korrekt og knap halvdelen der slet ikke prøver at besvare den. Det gør besvarelsenerne til marginalbesvarelser i nordisk sammenhæng i det procentdelen af korrekte besvarelser er den laveste og andel af ikke besvarede opgaver er den højeste. Der er på grundlag af besvarelsesprocenterne i de forskellige lande grundlag for at sige at opgaven er kønsneutral.

#### 4.12.4 Hvordan besvarede danske elever opgaven? Analyse af originalsvar

Det følgende er eksempler på originale elevbesvarelser der giver et indblik i hvordan elever har ræsonneret og hvordan de kommunikerer deres ræsonnementer. Det fremgår af besvarelsenerne at de korrekte svar stort set er formuleret og argumenteret som forudset i rette vejledningen, hvilket ikke gælder de ikke-korrekte svar, hvor svarerne strækker sig fra direkte afmagt "det ved jeg ikke" og "... jeg er total idiot ..." til besvarelser der er på vej mode en korrekt besvarelse " Gr. A =  $9+50+50+50+60+60+60+60+70+70+80+80 = 695$  Gr. B =  $40 + 40 + 50 + 60 + 60 + 60 + 60 + 60 + 70 + 70 + 70 + 80 = 720$ " selv om der er mange både tekniske og forståelsesfejl og mangler.

Svareksempler der blev vurderet som korrekte med Kode 1:

- Fordi gruppe B har flere end gruppe A som ikke har bestået prøven
- Gruppe A klarede sig bedre end gruppe B fordi de har flere elever der bestod prøven.
- Der var flest i gruppe A der havde mellem 80 og 89.
- Det er ham den ene fra gruppe A med 0-9 der trækker gennemsnittet ned.
- F.eks. der var 2 elever i gruppe A, som var de bedste i hele fysik-prøven, og når der er en elev som ikke får mere end 9 point, så trækker det gennemsnittet ned. Flere dumpede i gruppe B.
- Selvom vi havde en som fik 0-9, havde vi alligevel 2 elever som fik 80-89, hvorimod gruppe B kun havde 1 elev som nåede det antal point.
- Flere A-elever fik 80-89 end B-elever, ergo er der flere "gode" elever i A, end i B.

- 91,6 % af Gruppe A's elever ligger over 50. Det er kun 84,6 % af gruppe B's elever der gør det.
- Gruppe A har haft bedre resultater i 50-59, 0-9 og 80 -89, og i disse søjler har gruppe B slet ikke klaret sig ret godt.
- Vi har flere der har over 50 (bestået)
- Hvis den person der har fået 0-9 i resultatet havde klaret sig bedre havde de haft bedre resultater.
- Gruppe A har 1 der ikke er bestået og gruppe B har 2 der ikke er bestået
- Da grænsen for at bestå ligger på 50, er der dermed 2 elever fra gruppe b der er dumpet og kun 1 fra gruppe A. Gruppe A har også flest elever med højest rigtige.
- Der var flere fra gruppe A end gruppe B som bestod prøven. Og flere fra gruppe B som ikke bestod:

	Antal bestod	Antal ikke bestod
Gruppe A	11	1
Gruppe B	10	2

- Gruppe A havde flere der bestod
- Der er flere børn under 50 i gruppe B og gruppe A havde flere der klarede sig bedre.
- For det første er der kun en fra gruppe A der er dumpet, mens to fra gruppe B har fået for lidt points. Det der gør A's gennemsnit lavere er, at en af gruppens elever har klaret sig meget dårligt. Hvis det ikke var for den ene elev ville A have klaret sig bedre end B, for så ville A have 3 elever der var bedre end B, mens B kun havde 2.
- At dem der har 0-9 trækker dem ned og de er bedre fordi at de har flere med 80-89
- Der er flere procent af gruppe A, som bestod prøven.
- En stor del af gruppe B's elever ligger under 50 rigtige.
- Gruppe A har kun en der dumpede, mens at gruppe B har 2 der dumpede.
- Eleverne i gruppe A's resultater er meget forskudt, og derfor er nogle af dem bedre end gruppe B.

Svareksempler der blev vurderet som forkerte med Kode 0:

- De kunne sige at de har ligeså mange der har bestået. Og at de generelt ligger meget ens i diagrammet i forhold til gruppe B.
- De har ikke klaret sig bedre for der var flere elever med i gruppe B.
- At gruppe A er dårlige tabere.
- Gr. A =  $9+50+50+50+60+60+60+60+70+70+80+80 = 695$  og Gr. B =  $40 +40 +50 + 60 +60+60+60+60+70+70+70+80 = 720$
- Læg alle resultater fra gruppe A sammen = 12 og læg alle resultater fra gruppe B sammen = 12
- Gruppe A har en mere i 80-89 og to mere i 50-59
- Jo højere man kommer op af rangstigen desto mere giver man i point
- At de har flere med 50-59 point og 80-89 point
- Det ved jeg ikke.
- Jeg kan ik' komme med en matematisk forklaring, for jeg er idiot til mat., men jeg har måske alligevel en løsning? Der hvor der er for meget søjle hos gruppe A... Det kunne man tage væk, så er der lige præcis var lige meget og lægge der, hvor gruppe B har

mere ... så ville det gå op.

- De klarede sig bedre i 3 af de søjler der.
- Der er flest fra gruppe A der har fået 90 -100
- Gruppe A var bedre end gruppe B i nogle situationer.
- Hvis man lægger det hele sammen, viser det alt i alt at gruppe A har det højeste gennemsnit.
- Gruppe B har tilsammen 828 p. Gruppe A har tilsammen 798 p. Det vil sige gruppe B var de bedste
- Gruppe B lagde kun vægt på 1 opgave, mens gruppe A havde flere opgaver løst!
- På grund af gruppe B har været i flertal, betyder det at de fik flest point. Hvis grupperne havde været ligestillet havde det været mere retfærdigt.
- Hvis du tager det højeste og det mindste væk vil gruppe A få et højere gennemsnit end gruppe B.
- Det er da lige meget hvem der har klaret sig bedst, bare de har bestået, det er da nok det vigtigste. Det kunne de jo sige.
- Deres lærer har regnet forkert
- B fordi de ligger højere hele vejen igennem og er stabile

## 4.13 VALGMULIGHEDER

I et pizzeria kan man købe en basispizza med to slags fyld: ost og tomat. Man kan også sammensætte sin egen pizza med **ekstra** fyld. Man kan vælge mellem fire forskellige slags ekstra fyld: oliven, skinke, champignoner og salami.

René vil bestille en pizza med to forskellige slags **ekstra** fyld.

Hvor mange forskellige kombinationer kan René vælge mellem?

Svar: ..... kombinationer.

### 4.13.1 Hvordan tillægges opgaven point?

Pointfordelingen af elevsvar med eksempler fra PISA-kodevejledningen:

Fuldt point

Kode 1: 6

Intet point

Kode 0: Andre svar

Kode 9: Ikke besvaret

### 4.13.2 Hvilke informationer kan opgaven give?

Karakteristika ved opgaven

PISA 2003 kategoribeskrivelser	
IDÉOMRÅDE	Størrelser
KONTEKST	Uddannelses – og arbejdsliv
KOMPETENCEKLASSE	Sammenhængskompetence
FORMAT	Kort svar
SVÆRHEDSGRAD	559 niveau 4

#### 4.13.3 Hvordan besvarede danske elever opgaven sammenlignet med elever i andre lande?

Svarprocenternes fordeling i Danmark og andre lande

Land	0 point	1 point	Ikke besvaret	Piger	Drenge	Alle
Danmark	49	45	5	48	42	45
Finland	39	60	2	64	56	60
Island	42	51	7	58	45	51
Norge	47	47	6	51	43	47
Sverige	48	49	2	54	45	49
Tyskland	49	46	5	50	51	46
Holland	56	43	1	46	40	43
USA	49	44	7	49	39	44
Japan	31	66	3	68	64	66
Tyrkiet	63	24	14	26	22	24
Mexico	65	25	10	24	27	25
OECD	46	49	5	52	47	49

Denne opgave er en af de opgaver hvor de danske elever præsterer under OECD-gennemsnittet og dårligst blandt de nordiske lande. Opgaven ser ud til at være en ”pige – opgave”, hvor pigerne præsterer bedre end drengene i alle nordiske lande og generelt blandt OECD – landene.

#### 4.13.4 Hvordan besvarede danske elever opgaven? Analyse af originalsvar

Der er mange forskellige svar udover det korrekte svar som er 6.

Forkerte svar fra en del elever:

12 4 8

Forkerte svar som kun få elever giver er

'Ost og tomat' 16 7 9 15 3 5 10 24 20

Det rigtige svar 6 er fulgt af notater som nedenstående af tre elever:

1,2 1,3 1,4 2,3 2,4 3,4

1+1+1+1+1+1

oliven-skinke, oliven-champ ... 3+2+1

Svaret 4 har fx disse notater fra en elev:

ost+1 ost +2 tomat +1 tomat +2


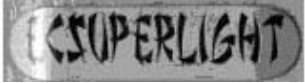


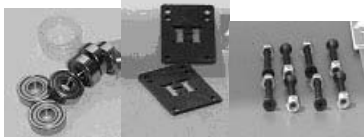
Ved svaret 24 er der tegnet et tælletræ med navnet på hver gren. Det giver 12, så eleven har desuden ganget med to!

## 4.14 SKATEBOARD

Erik er en stor skateboardfan. Han går ind i en butik, der hedder SKATERS, for at tjekke nogle priser.

I denne butik kan man købe et komplet skateboard. Eller man kan købe et bræt, et sæt med 4 hjul, et sæt med 2 aksler og et sæt tilbehør og samle sit eget skateboard.

Prisen på butikkens varer er:

Vare	Pris i zed	
Komplet skateboard	82 eller 84	
Bræt	40, 60 eller 65	
Et sæt med 4 hjul	14 eller 36	
Et sæt med 2 aksler	16	
Et sæt tilbehør (kuglelejer, gummiplader, bolte og møtrikker)	10 eller 20	

### SPØRGSMÅL 1:

Erik vil selv samle sit skateboard. Hvad er minimumsprisen, og hvad er maksimumsprisen for skateboards, når man samler selv?

(a) Minimumspris: ..... zed.

(b) Maksimumspris: ..... zed.

### SPØRGSMÅL 2:

Butikken tilbyder tre forskellige brættyper, to forskellige sæt hjul og to forskellige sæt tilbehør. Der er kun mulighed for at vælge et sæt aksler.

Hvor mange forskellige skateboards kan Erik konstruere?

*Sæt ring om bogstavet foran det rigtige svar.*

- A 6
  - B 8
  - C 10
  - D 12
- 

### SPØRGSMÅL 3:

Erik har 120 zed, som han kan bruge, og han vil købe det dyrest mulige skateboard, han har råd til.

Hvor mange penge har Erik råd til at bruge på hver af de fire dele? Indsæt dine svar i tabellen nedenfor.

Del	Beløb (zed)
Bræt	
Hjul	
Aksler	
Tilbehør	

#### 4.14.1 Hvordan tillægges spørgsmål 1 point?

Pointfordelingen af elevsvar med eksempler fra PISA-kodevejledningen:

##### SPØRGSMÅL 1:

Fuldt point.

Kode 2: Både minimum (80) og maksimum (137) er rigtigt

Delvist point.



Kode 11: Kun minimum (80) er rigtigt.  
 Kode 12: Kun maksimum (137) er rigtigt.  
 Intet point.  
 Kode 0: Andre svar  
 Kode 9: Intet svar.

#### 4.14.2 Hvilke informationer kan spørgsmål 1 give?

Karakteristika ved spørgsmål 1

PISA 2003 kategoribeskrivelser	
IDÉOMRÅDE	Størrelser
KONTEKST	Det personlige liv
KOMPETENCEKLASSE	Reproduktionskompetence
FORMAT	Kortsvar
SVÆRHEDSGRAD	464 niveau 2 (delvist point) og 494 niveau 3 (fuldt point)

Eleven skal i denne opgave løse et problem der henhører til en hverdagsituation i mange unges liv, derfor er konteksten det personlige liv. Eleven skal finde prisen på forskellige skateboards der fås ved at blive sammensat af forskellige dele. Priserne på de enkelte dele er opgivet og i første delopgave skal eleven finde henholdsvis det billigste og set dyreste skateboard der kan laves ud fra de viste dele, så idéområdet er Størrelser. Der gives delvist point for et delvist svar (1 point) og fuldt point (2 point) for begge svar der. Opgaven kræver reproduktionskompetence til at finde de tal der skal adderes. Det er en kortsvarsopgave, hvor eleven får et 1 point for at oplyse enten minimum-prisen eller maksimumprisen, men ikke begge, hvilket giver sværhedsgrad på niveau 2. Hvis eleven gennemfører begge additioner korrekt med minimum:  $40 + 14 + 16 + 10 = 80$  og maksimum:  $65 + 36 + 16 + 20 = 137$  er sværhedsgraden på niveau 3.

#### 4.14.3 Hvordan besvarede danske elever spørgsmål 1 ift. elever i andre lande?

Svarprocenternes fordeling i Danmark og andre lande

Land	0 point	1 Point	2 Point	Ikke besvaret	Piger	Drenge	Alle
Danmark	15	9	72	4	75	78	77
Finland	9	9	81	1	84	86	85
Island	15	9	72	5	77	75	76
Norge	16	8	71	5	74	77	75
Sverige	14	9	73	4	76	79	78
Tyskland	12	11	72	5	77	78	77
Holland	19	8	71	2	75	74	75
USA	27	9	58	6	59	65	62
Japan	27	8	51	11	58	59	59
Tyrkiet	38	11	39	12	44	44	44
Mexico	36	13	43	9	47	51	49
OECD	18	11	67	5	71	73	72

Finske elever præsterer helt i top, og de øvrige nordiske elever præsterer over gennemsnittet blandt OECD-landene. Opgaven har i de fleste lande en højere rigtighedsprocent hos drengene end pigerne uden det er en markant forskel. Japanske elever præsterer relativt lavt på dette spørgsmål, en hel del under OECD-gennemsnittet.

#### 4.14.4 Hvordan besvarede danske elever spørgsmål 1? Analyse af originalsvar

Blandt 122 besvarelser vi er gået i dybden med, finder vi følgende særlige svar:

Det mest typiske svar til 0 point er svaret 162 – 221. Dette svar er givet af 7 procent af eleverne, altså omkring halvdelen af de besvarelser der har fået 0 point. Svaret kan formodentlig skyldes en for hurtig og overfladisk læsning og dermed svag forståelse af tabellens første oplysninger. Svarene 162 og 221 fremkommer som 80 + 82 og 137 + 84. Proceduremæssigt er det korrekt, men de to første tal i tabellen viser priser på et komplet skateboard og skal derfor ikke regnes med.

Andre svar til 0 point er svarene 10 – 20, 86-121 og 162-221 fra hver en elev. To elever har svaret 70-117.

Som delvise svar indgår tallet 80 hos tre elever i henholdsvis 80 – 221 og 80 – 132, og tallet 137 indgår hos to elever i henholdsvis 90 – 137 og 60 - 137

#### 4.14.5 Hvordan tillægges spørgsmål 2 point?

Spørgsmål 2 er en multiple-choice opgave eller flervalgsopgave. Der gives kun point for det korrekte valg af svar.

Korrekt svar er D.

#### 4.14.6 Hvilke informationer kan spørgsmål 2 give?

Karakteristika ved spørgsmål 2

PISA 2003 kategoribeskrivelser	
IDÉOMRÅDE	Størrelser
KONTEKST	Det personlige liv
KOMPETENCEKLASSE	Reproduktionskompetence
FORMAT	Multiple-choice (Flervalgsopgave)
SVÆRHEDSGRAD	570 niveau 4

Denne opgave er en kombinatorikopgave. Eleverne kan løse den på flere måder. De kan enten opskrive og tælle de forskellige kombinationer ved hjælp af et tælletræ, eller de kan anvende multiplikationsprincippet:  $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = 12$ .

De første tre karakteristika er de samme som ved første spørgsmål, men opgavetyper og sværhedsgraden er forskellig. Denne flervalgsopgave kan ikke umiddelbart besvares ved at se på de fire svarmuligheder og oplysningerne i teksten. Der skal anvendes en systematisk beskrivelse af mulige kombinationer, hvilket har gjort sværhedsgraden af dette spørgsmål højere end for spørgsmål 1 og 3. til er det højeste alle spørgsmålene i denne opgave.

#### 4.14.7 Hvordan besvarede danske elever spørgsmål 2 ift. elever i andre lande?

Svarprocenternes fordeling i Danmark og andre lande

Land	0 point	1 point	Ikke besvaret	Piger	Drenge	Alle
Danmark	36	60	4	56	64	60
Finland	42	56	2	52	60	56
Island	46	52	2	50	54	52
Norge	51	43	6	41	46	43
Sverige	53	43	4	38	49	43
Tyskland	50	45	5	42	47	45
Holland	45	54	1	53	55	54
USA	47	50	3	49	51	50
Japan	30	67	3	65	69	67
Tyrkiet	65	28	7	26	30	28
Mexico	70	23	7	21	25	23
OECD	50	46	4	42	49	46

De danske elever præsterer bedst blandt de nordiske lande og det markant. Endvidere bemærkes det at denne opgave er en markant drenge-opgave, idet der dels er store kønsforskelle i de fleste lande (i Danmark på  $64 - 56 \% = 8 \%$ ), dels er det en af de få opgaver hvor islandske drenge præsterer bedre end islandske piger.

#### 4.14.8 Hvordan besvarede danske elever spørgsmål 2? Analyse af originalsvar

Fordelingen af på de fire mulige svar med D som det korrekte svar, er:

A (svar 6): 17 % B (svar 8): 13 % C (svar 10): 7 % D (svar 12): 60 %

Det samme svarmønster går igen i alle de nordiske lande. Da ingen af svarprocenterne på A, B eller C når op over de cirka 25 % i nogen af de nordiske lande er det vanskeligt at pege på nogen håndfast forklaring på hvorfor fordelingen er som den er. Det kan se ud som om elev enten har den reproduktionskompetence der skal til at besvare opgaven korrekt eller gætter.

#### 4.14.9 Hvordan tillægges spørgsmål 3 point?

Pointfordelingen af elevsvar med eksempler fra PISA-kodevejledningen:

Fuldt point

Kode 1:

65 zed på et bræt, 14 på hjul, 16 aksler og 20 på tilbehør, der sammenlagt giver 115 zed

Intet point

Kode 0: Andre svar

Kode 9: Intet svar.

#### 4.14.10 Hvilke informationer kan spørgsmål 3 give?

Karakteristika ved opgaven

PISA 2003 kategoribeskrivelser	
IDÉOMRÅDE	Størrelser
KONTEKST	Det personlige liv
KOMPETENCEKLASSE	Kompetenceklasse: sammenhængskompetence
FORMAT	Kort svar
SVÆRHEDSGRAD	554 niveau 4

Eleven skal i denne opgave løse et problem der også henhører til en hverdagssituation, det personlige liv.. Eleven skal finde det dyreste skateboard der kan blive sammensat af forskellige dele, får højst 120 zed. Dette kræver mere end en rutinemæssig procedure, det kræver i bogstavelig forstand sammenhængskompetence. Der kan anvendes flere veje til en løsning men en af dem kan være at tage udgangspunkt i den allerede fundne dyreste udgave og så udskifte forskellige dele til man når lige på eller under 120 zed, som eleven skal dokumentere med et kort svar, altså uden angivelse af forklaring. Sværhedsgraden er til niveau 4 altså samme niveau som forrige spørgsmål, men ikke med samme scorer. Det er et eksempel på at selv det kompetencehierarkisk er et sværere spørgsmål behøver det ikke at være det, fordi sværhedsgraderne spænder over cirka 60 point på hvert niveau

#### 4.14.11 Hvordan besvarede danske elever spørgsmål 3 ift. elever i andre lande?

Svarprocenternes fordeling i Danmark og andre lande

Land	0 point	1 Point	Ikke besvaret	Piger	Drenge	Alle
Danmark	41	54	5	55	53	54
Finland	39	59	2	59	59	59
Island	39	55	6	60	50	55
Norge	38	54	8	56	51	54
Sverige	36	59	5	57	61	59
Tyskland	42	52	6	51	53	52
Holland	43	56	1	59	54	56
USA	50	46	4	48	45	46
Japan	37	54	9	52	55	54
Tyrkiet	65	25	10	24	27	25
Mexico	42	30	8	29	32	30
OECD	45	50	5	49	51	50

Den opgave har været vanskelig for lidt under halvdelen af de danske elever, hvilket er træk der ses mere eller mindre i alle de andre europæiske lande. De danske elever har en rigtighedsprocent der er over OECD-gennemsnittet. Der er ingen markant forskel på de danske piger og drenge besvarelser af spørgsmålet og internationalt er det heller ikke de store

forskelle, når man ser bort fra Island hvor de islandske piger klarer opgaven klart bedre end drengene.

#### 4.14.12 Hvordan besvarede danske elever spørgsmål 3? Analyse af originalsvar

Blandt de ikke-korrekte svar er der særligt to typer som gives af en del elever.

Den ene type består i at vælge 40, 36, 16 og 20 der sammenlagt giver 112. Det korrekte svar er at vælge 65, 14, 16, 20 der sammenlagt giver lidt mere, nemlig 115. Dette er en kombination som Erik har råd til med sine 120 kroner. Cirka 20 % af eleverne har valgt at give dette svar. Den anden type er anvendt af 14 % af eleverne. De foreslår 60, 36, 16, 20 hvilket giver 122 sammenlagt. Det er i virkelighedens verden en umulig løsning – hvis da ikke Erik forhandler sig til rabat!

Principielt er den anden fejltype "mere" forkert end den første fejltype. Første type svar er "næsten" rigtigt og eleven kan kun klandres for ikke at være kommet tættere på de 120 zed, hvorimod anden type svar burde have været kasseret, og eleven burde have søgt et nyt svar.

Endelig er der også en gruppe elever der giver svaret 30 30 30 og 30, hvilket i alt giver 120 kroner; men det er ikke priser der er angivet i opgavetekstens informationer.

#### 4.15 TRAPPEMØNSTER

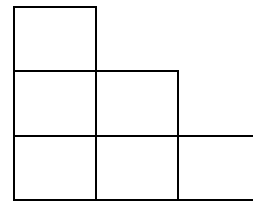
Rune laver et trappemønster ved brug af kvadrater. Her er vist hans fremgangsmåde:



Trin 1



Trin 2



Trin 3

Som du kan se, bruger han ét kvadrat til Trin 1, tre kvadrater til Trin 2 og seks kvadrater til Trin 3  
Hvor mange kvadrater skal han bruge til det fjerde trin?

Svar: kvadrater

##### 4.15.1 Hvordan tillægges opgaven point?

Pointfordelingen af elevsvar med eksempler fra PISA-kodevejledningen:

Fuldt point

Kode 1: 10

Intet point

Kode 0: Andre svar

Kode 9: Intet svar

#### 4.15.2 Hvilke informationer kan opgaven give?

Karakteristika ved opgaven

PISA 2003 kategoribeskrivelser	
IDÉOMRÅDE	Størrelser
KONTEKST	Uddannelses – og arbejdsliv
KOMPETENCEKLASSE	Reproduktionskompetence
FORMAT	Kort svar
SVÆRHEDSGRAD	484 niveau 3

Eleverne skal i denne opgave vise at de kan se tal – mønsteret knyttet til det geometriske mønster, der dannes ved tegning af trapperne. Opgavens idéområde er Størrelser da eleven skal finde talstørrelser der beskriver trappestørrelser. Konteksten er uddannelses – og arbejdsliv, denne kategorisering sker fordi opgavens kontekst er ren matematiktekst der stort set kun vil forekomme i lærebog i matematik. En korrekt besvarelse kræver at eleven kan se hvordan trapperne ”vokser”.

1

$$1 + 2 = 3$$

$$1 + 2 + 3 = 6$$

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

Opgaven kan løses både ved at se en algebraisk sammenhæng som vist, men også geometrisk ved at se at der hver gang lægges en ”centikube”-stang på i bunden eller på den venstre side, der indeholder én kube mere end den stang der kom på forrige gang.

Eleven behøver ikke at kende trekant - tallene:

$$1, 3, 6, 10, 15, \dots, T_n, \text{ hvor } T_n = n \cdot (n + 1) / 2$$

Besvarelsen kræver reproduktionskompetence og der skal ikke redegøres for frembringelsen af opgaven så dette er en kortvarsopgave.

#### 4.15.3 Hvordan besvarede danske elever opgaven sammenlignet med elever i andre lande?

Svarprocenternes fordeling i Danmark og andre lande

Land	0 point	1 point	Ikke besvaret	Piger	Drenge	Alle
Danmark	21	78	2	76	79	78
Finland	27	72	1	73	71	72
Island	30	68	2	71	66	68
Norge	21	78	2	78	77	78
Sverige	24	76	1	75	76	76
Tyskland	33	65	1	61	70	65
Holland	25	75	0	76	75	75
USA	37	60	3	59	61	60
Japan	12	88	1	87	88	88
Tyrkiet	51	47	2	45	49	47

Mexico	56	41	2	38	44	41
OECD	32	66	1	64	68	66

De danske og norske elever og generelt eleverne fra de nordiske lande præsterer et godt stykke over det internationale gennemsnit. Eneste undtagelse er islandske drenge. Det er påfaldende at denne opgave besvares af næsten alle elever, og det gælder i alle de angivne lande og samlet for OECD. I ingen lande var der flere end 5 % der ikke besvarede opgaven.

#### 4.15.4 Hvordan besvarede danske elever opgaven? Analyse af originalsvar

Ud af 119 analyserede besvarelser angiver 80 % det korrekte svar 10.

8 % angiver svaret 9. Det skyldes antagelig, at disse elever fokuserer på det algebraiske eller talmæssige aspekt af følgen 1,3, 6 så må det næste tal nok være 9, altså 3-tabellen hvor der enten ses bort fra 1 i starten eller 1 opfattes som et slags startsignal til at gå i gang med tretabellen.

5 % angiver svaret 4. Disse elever har faktisk set det matematiske mønster - enten geometrisk eller algebraisk - og de skriver antallet af kvadrater der skal tilføjes fra Trin 3 til Trin 4. Det er den funktionelle læseforståelse af tekst og figurer og sammenknytningen af tekst og figur, der halter. Teksten lyder

Som du kan se, bruger han ét kvadrat til Trin 1, tre kvadrater til Trin 2 og seks kvadrater til Trin 3.

Hvor mange kvadrater skal han bruge til det fjerde trin?

Ifølge teksten er det hele figurer der betegnes som trin og ikke kun den dynamiske tilføjelse, og det er det samlede antal kvadrater til et trin, der hentydes til med verbet 'bruge'.

#### 4.15.1 Hvordan tillægges opgaven point?

Pointfordelingen af elevsvar med eksempler fra PISA-kodevejledningen:

Fuldt point

Kode 1: 10

Intet point

Kode 0: Andre svar

Kode 9: Intet svar

#### 4.15.2 Hvilke informationer kan opgaven give?

Karakteristika ved opgaven:

PISA 2003 kategoribeskrivelser	
IDÉOMRÅDE	Størrelser
KONTEKST	Uddannelses – og arbejdsliv
KOMPETENCEKLASSE	Reproduktionskompetence
FORMAT	Kortsvar
SVÆRHEDSGRAD	484 niveau 3

Eleverne skal i denne opgave vise, at de kan se talmønstret knyttet til det geometriske mønster, der dannes ved tegning af trapperne. Opgavens idéområde er Størrelser, da eleven



skal finde talstørrelser, der beskriver trappestørrelser. Konteksten er uddannelses- og arbejdsliv, denne kategorisering sker, fordi opgavens kontekst er ren matematiktekst, der stort set kun vil forekomme i en lærebog i matematik. En korrekt besvarelse kræver, at eleven kan se, hvordan trapperne "vokser".

1

$$1 + 2 = 3$$

$$1 + 2 + 3 = 6$$

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

Opgaven kan løses både ved at se en algebraisk sammenhæng som vist, men også geometrisk ved at se, at der hver gang lægges en "centikube"-stang på i bunden eller på den venstre side, der indeholder én kube mere end den stang, der kom på forrige gang.

Eleven behøver ikke at kende trekant-tallene:

$$1, 3, 6, 10, 15, \dots, T_n, \text{ hvor } T_n = n \cdot (n + 1) / 2.$$

Besvarelsen kræver reproduktionskompetence, og der skal ikke redegøres for frembringelsen af opgaven, så dette er en kortsvarsopgave.

#### 4.15.3 Hvordan besvarede danske elever opgaven sammenlignet med elever i andre lande?

Svarprocenternes fordeling i Danmark og andre lande:

Land	0 point	1 point	Ikke besvaret	Piger	Drenge	Alle
Danmark	21	78	2	76	79	78
Finland	27	72	1	73	71	72
Island	30	68	2	71	66	68
Norge	21	78	2	78	77	78
Sverige	24	76	1	75	76	76
Tyskland	33	65	1	61	70	65
Holland	25	75	0	76	75	75
USA	37	60	3	59	61	60
Japan	12	88	1	87	88	88
Tyrkiet	51	47	2	45	49	47
Mexico	56	41	2	38	44	41
OECD	32	66	1	64	68	66

De danske og norske elever og generelt eleverne fra de nordiske lande præsterer et godt stykke over det internationale gennemsnit. Eneste undtagelse er islandske drenge. Det er påfaldende, at denne opgave besvares af næsten alle elever, og det gælder i alle de angivne lande og samlet for OECD. I ingen lande var der flere end 5 %, der ikke besvarede opgaven.

#### 4.15.4 Hvordan besvarede danske elever opgaven? Analyse af originalsvar

Ud af 119 analyserede besvarelser angiver 80 % det korrekte svar, 10.

8 % angiver svaret 9. Det skyldes antagelig, at disse elever fokuserer på det algebraiske eller talmæssige aspekt af følgen 1, 3, 6, så må det næste tal nok være 9, altså 3-tabellen, hvor der enten ses bort fra 1 i starten, eller 1 opfattes som et slags startsignal til at gå i gang med tretabellen.

5 % angiver svaret 4. Disse elever har faktisk set det matematiske mønster - enten geometrisk eller algebraisk - og de skriver antallet af kvadrater, der skal tilføjes fra Trin 3 til Trin 4. Det er den funktionelle læseforståelse af tekst og figurer og sammenknytningen af tekst og figur, der halter. Teksten lyder

Som du kan se, bruger han ét kvadrat til Trin 1, tre kvadrater til Trin 2 og seks kvadrater til Trin 3.

Hvor mange kvadrater skal han bruge til det fjerde trin?

Ifølge teksten er det hele figurer, der betegnes som trin, og ikke kun den dynamiske tilføjelse, og det er det samlede antal kvadrater til et trin, der hentydes til med verbet 'bruge'.

Enkelte elever angiver:

11 12 18 13

## 5. INSPIRATION

Lærere – såvel som elever og andre – kan opleve usikkerhed med at vurdere og tolke forskellige elevsvar. Spørgsmålet er, hvordan læreren ud fra forskellige elevsvar kan drage informationer om elevens opfattelse og forståelse, og hvordan læreren kan udnytte elevsvarene fremadrettet i læreprocessen?

Materialet er et skatkammer, man går på opdagelse i. Det rummer et væld af eksempler på elevsvar, som er blevet vurderet til at være korrekte, delvist korrekte eller forkerte, og hvor der er bud på, hvad svarene indikerer om elevens opfattelse og forståelse.

Med analyserne af besvarelserne fra et stort antal elever er det hensigten at inspirere matematiklæreres vurdering og tolkning af deres egne elevers besvarelser og arbejdsmetoder. Lærerne kan anvende materialets opgaver direkte i deres egen undervisning og formative evaluering, eller opgaverne kan tilpasses ved at ændre kontekst, tal, figurer, sprog og opgaveformat. Lærerne kan også inddrage autentiske elevsvar fra materialet i deres matematikundervisning.